עלון אישח"מ

עלון האיגוד הישראלי לשיטות חישוביות במכניקה

מרץ 2001 מספר 5

עורך: דן גבעולי, הפקולטה להנדסת אוירונוטיקה וחלל, טכניון, חיפה 32000,
טל. 8293814 (04), פקס 8231848 (04), דואר אלקטרוני: givolid@aerodyne.technion.ac.il

אתר אישח"מ (**IACMM**) באינטרנט: http://www.eng.tau.ac.il/~harari/IACMM/iacmm.html
רישום לחברות באגודה ופרטים נוספים: באתר האגודה הנ"ל, או פנו למזכיר-גזבר,
ד"ר זוהר יוסיבש, המחלקה להנדסת מכונות, אוניברסיטת בן-גוריון בנגב, באר שבע 84105,
טל. 6477103 (07), פקס 6472813 (07), דואר אלקטרוני: zohary@pversion.bgu.ac.il

---

הערות העורך:
נא שלחו לכתובת המערכת (בדואר אלקטרוני או רגיל) חומר לפרסום בעלון. ניתן ורצוי לצרף ציורים ותמונות. לידיעת חברות - ניתן גם לפרסם חומר מסחרי- פרסומי בתשלום. לפרטים נא לפנות למערכת. גירסה צבעונית של עלון זה מופיעה באתר האגודה (ראה לעיל).

יום העיון ה- 10 של אישח"מ
ISCM-10 יתקיים ב- 29.3.01 באוניברסיטת ת"א. תוכנית יום-העיון מצורפת לעלון זה. כולכם מוזמנים!

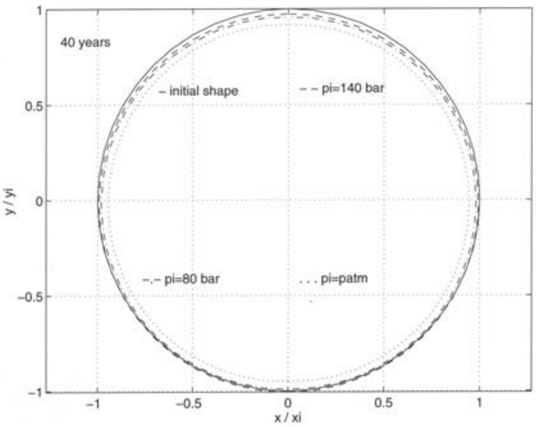
בגליון זה
שני קטעים מעבודות שהוצגו ב-ISCM-9 מופיעים להלן. המערכת מברכת על יוזמת הכותבים ומזמינה גם מציגים עתידיים ב-ISCM לשלוח סיכומים דומים לפרסום.

אנליזת אלמנטים סופיים של התנהגות דינמית של נקרות מלח גדולות

עמיאל הרשאגה
חברת החשמל לישראל בע"מ
amiel@iec.co.il

אגירת גז טבעי או אוויר דחוס לצורך ייצור אנרגיה מתבצעת לעיתים קרובות בחללים תת-קרקעיים. אתרים בעלי תכונות מכניות ונקבוביות מתאימות מהווים פתרון מצוין לאגירת נפחים גדולים. בין היתרונות של שיטת אגירה זו ביחס לאגירה במכלי לחץ רגילים, ניתן לציין בטיחות, חיסכון בחומרים ובהוצאות החזקה. יתרון שיטת ההמסה כשיטת בנייה יחד עם התנהגות הזחילה של המלח מהווים תנאים כדאיים לשימוש מסוג זה. אולם, תכונות אלה הופכות את יציבות הנקרה והתפתחות שדה המאמצים הקשור אליה לנקודה מרכזית בתהליך התכנון. לאנליזה זו שלוש מטרות: מניעת נפילה של חלקי תקרה, חיזוי הקטנת נפח הנקרה במשך חיי שירות הצפויים וקביעה של מיקום תושבת הצנרת (casing seat).
לצורך ביצוע העבודה נעשה שימוש ביכולות הלא-ליניאריות ותלויות זמן של חבילת אלמנטים סופיים מסחרית. נבדקה השפעות לחץ אגירה, גיאומטריה ומבנה שכבתי של התווך (שוני בתכונות חומר ועובי השכבות). בעבודה יושמו שני חוקי זחילה שונים ללא כל הגבלת הכלליות של הגישה. בוצעה גם אנליזה אלסטו- פלסטית, עם מעטפת כניעה Drucker- Prager. אנליזה זו מספקת חסם פיסיקאלי להתנהגות הזחילה הויסקואלסטית. בנוסף, הפתרון האלסטו- פלסטי

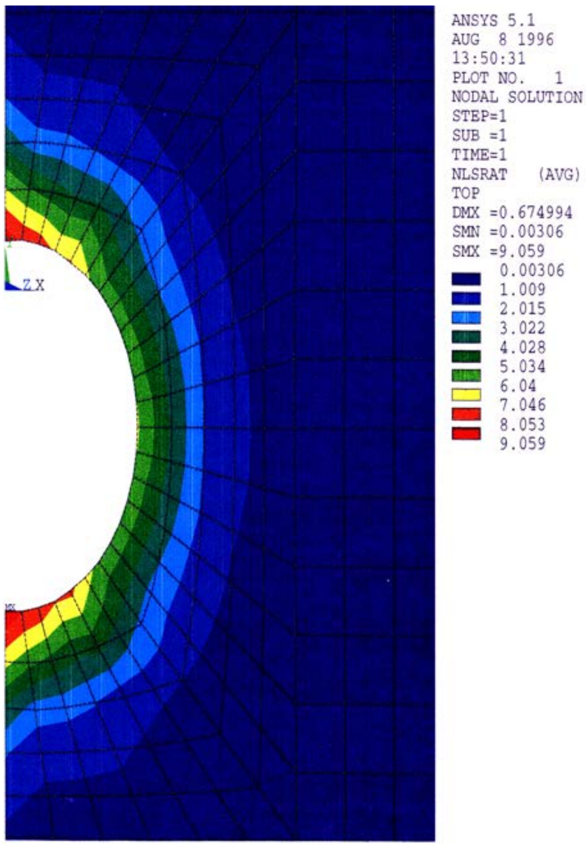
ניתן להשוואה עם פתרון אנליטי קיים (Serata, S. & Gloyna, E. F., 1960) עבור הגיאומטריה הנתונה תחת עמיסה סימטרית. עפ"י התוצאות, התאמת התוצאות הנומריות לפתרון האנליטי גדלה כפי שהיחס בין הלחץ הפנימי ללחץ ההידרוסטטי (עומק החלל) גדל.
התוצאות מראות שתזוזת המשטח העוטף את חלל הנקרה, מתנהגת בצורה אסימפטוטית, כלומר היא איננה גדלה עוד, מעל סף מסוים של הלחץ הפנימי, עבור התנאים הנתונים. לכן, על בסיס שיקולי מניעת הקטנת הנפה, אין צורך בהעלאת לחץ האגירה מעל סף זה. מסקנה נוספת היא שבטווח לחצי האגירה הגבוהים יחסית, תזוזת החלל מתכנסת לערך יחיד ללא תלות ברדיוס החלל. תוצאה זו מצביעה על כדאיות אגירת נפחים גדולים ולחצים יחסית גבוהים.
אנליזה לא-תמידית בוצעה עבור התווך השכבתי (שני סוגי סלע ומלח). העמיסה תלויה בזמן, שנה בלחץ קבוע לצורך התייצבות החלל ולאחר מכן מחזורים של פריקה וטעינה על בסיס יומי. שדות המאמצים והתזוזות המתקבלות לאורך היסטורית העמיסה מספקים מידע חשוב לא רק עבור יציבות המבנה ומניעת כשלים אפשריים, אלא גם עבור מיקום תושבת הצנרת המחברת את פני הקרקע עם החלל (casing seat).



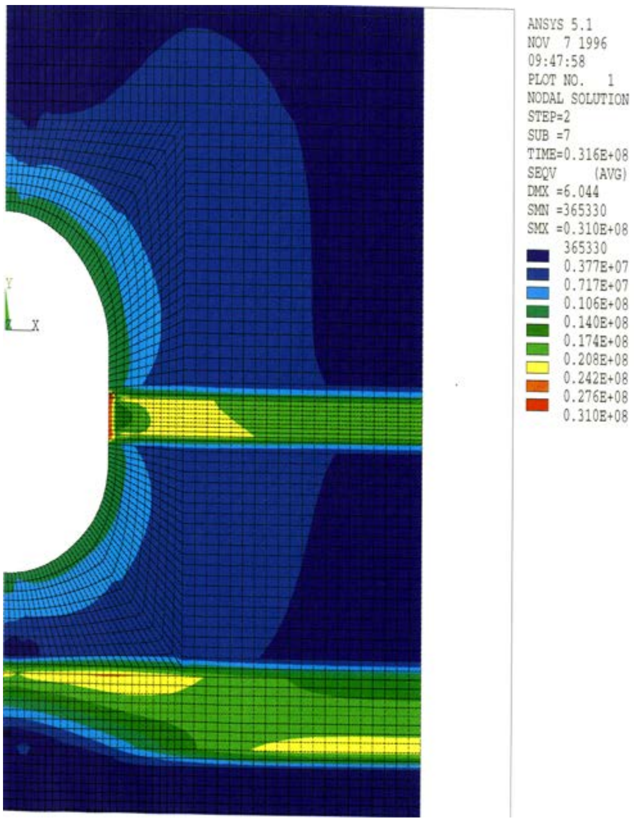
ציור 2: בעיית זחילה בתווך מלח אחיד. הקטנת הנפח הצפויה לאחר 40 שנות עבודה.

התוצאות המוצגות כאן התקבלו בעזרת תוכנת ANSYS גירסה 5.1.

Ref: Serata, E. & Gloyna, E. F., 1960, "Principles of Structural Stability of Underground Salt Cavities", Journal of Geophysical Research, Vol. 65, No. 9.



ציור 1: יחס בין מאמץ אלסטי אקוויוולנטי למאמץ הכניעה של החומר בקרבת החלל בתווך מלח אחיד (משמעות ערך גדול מ- 1 מצב פלסטי מלא).



ציור 3: תווך שכבתי. מאמץ אפקטיווי לאחר שנה בלחץ פנימי של 20 MPa ו- 6 שעות ב- 13 MPa.

הערכת שגיאת דיסקרטיזציה באנליזות אלמנט סופי בבעיות ליניאריות

זוהר יוסיבאש
ראש המעבדה למכניקה חישובית,
המח' להנדסת מכונות, אונ' בן-גוריון
zohary@pversion.bgu.ac.il

שיטות אלמנט סופי (FE) פותרות משוואות המתארות תופעות פיסיקליות באופן נומרי[1]. כתוצאה, כל פתרון FE, שיסומן כ- $\vec{u}_{FE}$, אינו אלא קרוב לפתרון המדויק[#] שיסומן כ- $\vec{u}_{EX}$, ולכן כל תוצאה המתקבלת באמצעות תוכנת אלמנט-סופי מכילה שגיאה נומרית שתסומן: $\vec{e}(\vec{x}) = \vec{u}_{EX}(\vec{x}) - \vec{u}_{FE}(\vec{x})$. מטרתנו כאן להציג שיטה להערכת השגיאה הנומרית מתוך פתרון אנליזת אלמנט סופי *ללא ידיעת הפתרון המדויק*. ללא הערכה זו לא ניתן לקבוע האם הפתרון שקיבלנו קרוב, או רחוק מאוד מהפתרון המדויק, ולכן אין אמינות בתוצאות.

מקובל להציג את השגיאה הנומרית באנליזות אלמנט סופי באמצעות *נורמת האנרגיה*. כדי להבין מהי, נגדיר ראשית את אנרגיית העיבורים:

$$U(\vec{u}) \equiv \frac{1}{2}\int_{\Omega} \sum_{i,j} \varepsilon_{ij}^{(\vec{u})}\sigma_{ij}^{(\vec{u})} d\Omega$$

כאשר $\varepsilon_{ij}^{(\vec{u})}$ (לחילופין $\sigma_{ij}^{(\vec{u})}$) מציין את העיבורים (לחילופין מאמצים) כתוצאה מוקטור ההזזות $\vec{u}$. כעת ניתן להגדיר את נורמת האנרגיה של השגיאה, שהיא שרש אנרגיית העיבורים של השגיאה:

$$\|\vec{e}\|_E \equiv \sqrt{U(\vec{e})} \equiv \sqrt{\frac{1}{2}\int_{\Omega}\sum_{i,j}\varepsilon_{ij}^{(\vec{e})}\sigma_{ij}^{(\vec{e})}d\Omega}$$

[1]לצורך פישוט הדיון אתייחס לבעיה אלסטית ליניארית עבורה ברצוננו למצוא את וקטור ההזזות שיסומן כ- $\vec{u}$ (ממנו ניתן לחשב העיבורים והמאמצים) בגוף כלשהו שיסומן ב- Ω.

[#]הפתרון ה"מדויק", $\vec{u}_{EX}$, הוא וקטור ההזזות שפותר את המשוואות המתמטיות במדויק. במידה והמשוואות הפיסיקליות מתארות היטב את התופעה הפיסיקלית, אזי $\vec{u}_{EX}$ קרוב לפתרון הפיסיקלי. איכות תאור המשוואות את התופעה הפיסיקלית נמדדת ע"י בחינת "שגיאת האידאליזציה", שאינה נדונה כאן.

ניתן להראות כי נורמת האנרגיה של השגיאה מהווה אינדיקציה לגבי מיצוע השגיאה במאמצים בריבוע בגוף.

כדי להעריך את השגיאה בנורמת האנרגיה יש להגדיר גם את מושג האנרגיה הפוטנציאלית, המסומנת כ- $\Pi(\vec{u})$, שהיא אנרגיית העיבורים פחות אנרגיית הכוחות החיצוניים:

$$\Pi(\vec{u}) \equiv U(\vec{u}) - \int_{\Omega} \vec{f}^T\vec{u}\,d\Omega - \int_{\partial\Omega}\vec{T}^T\vec{u}\,dS$$

כאן אנו מסמנים ב- $\vec{f}$ את כוחות הגוף וב- $\vec{T}$ את ההטרחות על שפת הגוף. כיוון שכוחות הגוף וההטרחות נתונות, ניתן לחשב את האנרגיה הפוטנציאלית של פתרון אלמנט סופי לאחר שחושב:

$$\Pi(\vec{u}_{FE}) \equiv \Pi_{FE} = U(\vec{u}_{FE}) - \int_{\Omega} \vec{f}^T\vec{u}_{FE}\,d\Omega - \int_{\partial\Omega}\vec{T}^T\vec{u}_{FE}\,dS$$

כעת, מתוך הגדרות אלו ניתן לבטא את השגיאה בנורמת האנרגיה באמצעות האנרגיה הפוטנציאלית:

$$\|\vec{e}\|_E \equiv \sqrt{\Pi_{FE}-\Pi_{EX}} \qquad (1)$$

אולם, כדי להשתמש בנוסחה (1) לחישוב השגיאה בנורמת האנרגיה יש לדעת את האנרגיה הפוטנציאלית של הפתרון המדויק, שאינו ידוע. יחד עם זאת, בתחילת שנות ה80- הוכח במאמרם של Babuska&Gui ושל Babuska&Guo, כי אם מספר דרגות החופש באנליזה (N) מספיק גדול, אזי ניתן לקבל הערכה טובה לשגיאה בנורמת האנרגיה ע"י המשואה הבאה:

$$\|\vec{e}\|_E \approx k/N^{\beta} \qquad (2)$$

כאשר k קבוע התלוי בפתרון המדויק, ואילו β הוא פרמטר התלוי בשיטת האלמנט הסופי (שיטת h- או שיטת p- או שיטת hp-) ובמאפייני הפתרון המדייק, ונקרא קצב ההתכנסות. אם נשתמש בהצבה של משואה (2) ל-(1) נקבל:

$$k^2/N^{2\beta} = \Pi_{EX} - \Pi_{FE}$$

במשואה לעיל ישנם שלשה נעלמים: k, β ו- Π_{EX}, לכן אנו צריכים שלש משואות. אם נפתור את הבעיה הנתונה שלש פעמים, כך שבכל פעם נגדיל את מספר דרגות החופש באופן הירכי (נניח כי כל אלמנט ריבועי יחולק לארבעה

אלמנטים שווים, או בשיטת p- דבר זה מתבצע אוטומטית, ראה [1]) נקבל שלש משוואות:

$$k^2/N_1^{2\beta} \approx \Pi_{EX} - \Pi_{FE}^{(1)}$$

$$k^2/N_2^{2\beta} \approx \Pi_{EX} - \Pi_{FE}^{(2)}$$

$$k^2/N_3^{2\beta} \approx \Pi_{EX} - \Pi_{FE}^{(3)}$$

כאשר הסימון $\Pi_{FE}^{(i)}$ מציין את האנרגיה הפוטנציאלית של הפתרון אלמנט סופי עם N_i דרגות חופש. כיוון שהתקבלו שלש משוואות לא לינאריות עבור שלשת הנעלמים, לאחר מניפולציות אלגבריות על המשוואות ניתן להביא את המערכת הנ"ל למשוואה אחת לא-לינארית עם משתנה אחד, Π_{EX}:

$$\frac{\Pi_{EX}-\Pi_{FE}^{(3)}}{\Pi_{EX}-\Pi_{FE}^{(2)}} \approx \left(\frac{\Pi_{EX}-\Pi_{FE}^{(2)}}{\Pi_{EX}-\Pi_{FE}^{(1)}}\right)^{Q}, \qquad Q=\frac{\log\left(N_2/N_3\right)}{\log\left(N_1/N_2\right)}$$

פתרון המשוואה מספק את ההערכה ל- Π_{EX}, ללא הצורך למצוא את הפתרון המדויק. כעת, כל שנותר כדי להעריך את השגיאה בנורמת האנרגיה של כל אחד מהפתרונות אלמנט סופי הוא להציב במשואה (1) את Π_{EX} שמצאנו ואת $\Pi_{FE}^{(i)}$. חשוב לציין כי משואה (2) נכונה רק עבור N "מספיק גדול". את אותו ה-N שהינו "מספיק גדול" ניתן למצוא לאחר סדרת פתרונות אלמנטים סופיים (הרבה יותר משלש פתרונות - כגון 8 פתרונות המקובלים בשיטות אלמנטים סופיים מסוג p-), ובדיקה כי התוצאות המתקבלות עבור Π_{EX} לכל 3 פתרונות עוקבים אינה משתנה בהרבה - דבר זה חד משמעי בשיטות h- בהן קצב ההתכנסות הוא לכל היותר אלגברי.

הפרוצדורה המתוארת לעיל מיושמת מזה שנים בתוכנות אלמנט סופי המסחריות העובדות בשיטת p- כגון pro/mechanica, esrd/StressCheck ו-phlex כיוון שבשיטות אלו מתקבלים באופן אוטומטי מספר פתרונות אלמנט-סופי היררכיים, עם מספר דרגות חופש הולך וגדל – ולפיכך ניתן להעריך את אמינות הפתרון בצורה טובה. בתוכנות מבוססות על שיטות h- השימוש בשיטות הנ"ל אינה נפוצה כיוון שיש להריץ לפחות שלש פעמים את האנליזה עם רשתות צפופות יותר ויותר, ולהבטיח כי שלשת הפתרונות אלמנט סופי התקבלו מתוך שדה היררכי. ברצוני להסב את תשומת לב הקוראים כי *לא ניתן בשום אופן להעריך את איכות הפתרון (הערכת שגיאה) מתוך פתרון אלמנט סופי יחיד*, ומרבית התוכנות המסחריות מטעות את המשתמש בדיווח "השגיאה באנרגיה" כביכול לאחר ריצה בודדת, שכלל אינה מצביעה על מידת הקרבה של הפתרון לפתרון המדויק.

למידע מפורט יותר ניתן לפנות למקור הבא:

[1] B. Szabo & I. Babuska, *Finite element analysis*, Wiley, 1991.

הדים מ-ISCM-9

מקשיבים כמהופנטים להרצאה מרתקת...

פרופ' בר-יוסף (משמאל), נשיא אישח"מ, מעניק תעודת זכיה למר ישי רינת, הזוכה בתחרות המאמרים.

פתרון חידות מה-הקשר:

1. מה הקשר בין שמשון הגיבור ושיטת האלמנטים הסופיים? <u>תשובה</u>: בשיטת האלמנטים הסופיים מטריצת הקשיחות היא <u>דלילה</u> (sparse).
2. מה הקשר בין ג'וקר לבין המצאת שיטת האלמנטים הסופיים? <u>תשובה</u>: אחד מחלוצי שיטת האלמנטים הסופיים, שגם המציא את שם השיטה, הוא Ray Clough. את שם משפחתו מבטאים "<u>קלף</u>".
3. מה הקשר בין דוכיפת לבין תוכנית המכילה את הפקודה if (a.eq.g0) r=r/(g0-a)*2.e4 ? <u>תשובה</u>: תוכנית שיש בה חלוקה לאפס <u>עפה</u>.