עלון
אישח"מ

עלון האיגוד הישראלי לשיטות חישוביות במכניקה

ספטמבר 2002 מספר 8

עורך: דן גבעולי, הפקולטה להנדסת אוירונוטיקה וחלל, טכניון, חיפה 32000,
טל. 8293814 (04), פקס 8231848 (04), דואר אלקטרוני: givolid@aerodyne.technion.ac.il
חברי ועד אישח"מ: עמנואל אור (מזכיר-גזבר), מיכאל אנגלמן, פנחס בר-יוסף, דן גבעולי,
יצחק הררי (נשיא), יונתן טל, זהר יוסיבש
איש-קשר עם ECCOMAS: מישל ברקוביר
ועדת ביקורת: איתן כוכבי, משה פוקס
אתר אישח"מ (IACMM) באינטרנט: http://www.iacmm.org.il
רישום לחברות באגודה ופרטים נוספים: באתר האגודה הנ"ל, או פנו למזכיר-גזבר,
ד"ר עמנואל אור, טל. 9908640 (04), פקס 9908164 (04), דואר אלקטרוני: emanuelo@rafael.co.il

---

הערות העורך:

נא שלחו לכתובת המערכת (בדואר אלקטרוני או רגיל) חומר לפרסום בעלון. ניתן ורצוי לצרף ציורים ותמונות. לידיעת חברות - ניתן גם לפרסם חומר מסחרי- פרסומי בתשלום. לפרטים נא לפנות למערכת. גירסה צבעונית של עלון זה מופיעה באתר האגודה (ראה לעיל).

חדשות אישח"מ

יום העיון ה- 12 של אישח"מ התקיים ב- 11 באפריל בטכניון בהצלחה רבה. יום העיון ה- 13 צפוי להתקיים ב- 10 באוקטובר באוניברסיטה העברית בירושלים. פרטים יפורסמו באתר האגודה וישלחו בדואר לחברי האגודה. הזוכה במקום הראשון בתחרות ההרצאות שנערכה במסגרת ימי-העיון ה- 11 וה- 12 היא ויקטוריה סופוניצקי, סטודנטית בפקולטה להנדסת אוירונוטיקה וחלל בטכניון, שהרצתה על "התפתחות של הפרעה ערבולית מקומית גדולה בזרימת גזירה אחידה". במקום השני זכה שמואל קידר, סטודנט מהמחלקה למכניקה, חומרים ומערכות באונ' ת"א. ברכות לזוכים! פרטים על הפרסים יפורסמו באתר האגודה.

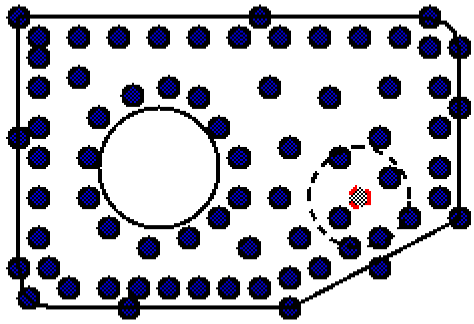
<u>נושא חם באישח"מ</u>

אנחנו פותחים פה במדור חדש, שיסקור מדי פעם נושאי מחקר מתחום המכניקה החישובית הנחשבים "חמים", כלומר נושאים שמופנה אליהם לאחרונה תשומת לב מחקרית רבה, משאבים כספיים וכו'. קל לאתר נושאים כאלה ע"י עיון בחוברות האחרונות של כתבי-העת וברשימות של מאמרים שהוצגו בכנסים. בתור דוגמה מייצגת בחרנו בכרך 53 (חוברות 1-12) של כתב-העת International Journal for Numerical Methods in Engineering שהופיע בחצי הראשון של שנת 2002. כל מאמר שפורסם בכרך זה ניתן לשיוך לנושא אחד או יותר, וסיכום של שיוך כזה לכרך כולו מצביע על הנושאים ה"חמים", מרובי המאמרים. אנו נציג נושאים אלו בעלון על קצה המזלג ומבלי להכנס לפרטים טכניים. חלק מהנושאים יובאו בגליון זה וחלקם בגליונות הבאים.

<u>שיטות חסרות-רשת</u>

בשנים האחרונות צצו, וזכו לפופולריות רבה, שיטות המזכירות מבחינות מסויימות את שיטת האלמנטים הסופיים (א"ס) אך <u>אינן מבוססות על רשת של אלמנטים</u>. הן נקראות בשמות רבים (מכיוון שהומצאו בו-זמנית ע"י חוקרים שונים), ביניהם Element-free Galerkin ,Meshless Methods ו-Particle Methods. נקרא להן בעברית "שיטות חסרות-רשת" (שח"ר). בשיטות אלו מפזרים

צמתים בתחום החישובי, אולם אין צורך לחבר צמתים אלו בשום צורה או להגדיר אלמנטים. נענה על מספר שאלות בסיסיות המתעוררות בקשר לשיטה זו.



(א) מהו היתרון בשח"ר?

היתרון העיקרי הוא שאין צורך לייצר רשת של אלמנטים. ייצור רשת, במיוחד עבור גוף תלת-מימדי עם גיאומטריה מסובכת, הוא תהליך מייגע למשתמש ויקר מאד. למעשה, באנליזה לינארית סטטית של גופים תלת-מימדיים מורכבים, ייצור הרשת הוא המרכיב ה"כבד" ביותר באנליזה, כלומר הוא יקר בהרבה מאשר תהליך בניית משוואות האלמנטים הסופיים ופתרונן. אמנם קיימים כיום מוצרי תוכנה המיועדים לייצור אוטומטי של רשתות (במיוחד רשתות של סימפלקסים, כלומר משולשים או טטרהדרים), אולם גם להם יש מגבלות משמעותיות ובמקרים רבים הם דורשים התערבות של המשתמש הגוזלת זמן רב. שח"ר חוסכת לחלוטין את הצורך ליצר רשת אלמנטים. החסכון הזה הוא במיוחד משמעותי בבעיות מסוג כזה הדורש בשיטת א"ס הסטנדרטית שינוי ועדכון הרשת פעמים רבות תוך כדי תהליך הפתרון. למשל, בפתרון א"ס של בעיות התפשטות סדקים, יש צורך לבנות מחדש את הרשת (או לפחות לשנות את הרשת לוקלית - גם היא משימה לא טריויאלית) בכל צעד בו הסדק מתארך. בשח"ר גם כן יש לעדכן את מיקום הצמתים (שכן ראוי לרכז מספר רב של צמתים סביב קצה הסדק) אולם התהליך פשוט בהרבה.

בנוסף, קל יותר בשח"ר לשלוט בדיוק של הפתרון מבחינה טכנית: על מנת לשפר את הדיוק כל מה שיש לעשות הוא "לזרוק פנימה" עוד נקודות צומת. ישנם גם יתרונות נוספים המתקבלים כ"בונוס". ע"פ Ted Belytschko, אחד המפתחים העיקריים של שח"ר, השיטה משוחררת מקשיי "נעילה" בבעיות באלסטיות כמעט בלתי-דחיסה, קצב ההתכנסות שלה לעיתים עולה על זה של שיטת א"ס, וניתן להשיג בה רזולוציה טובה לגרדיאנטים תלולים מקומיים.

(ב) במה שח"ר דומה לשיטת א"ס ובמה היא שונה?

נתייחס במיוחד לגירסה של שח"ר הנקראת Element-free Galerkin. גם בשח"ר, כמו בא"ס, מגדירים פונקציות צורה עבור כל צומת, המהוות בסיס שבעזרתו מבוטא הפתרון. וגם בשח"ר פונקציות אלו הן לוקליות, כלומר מתאפסות מחוץ לאזור קטן המוגדר סביב הצומת, הנקרא אזור ההשפעה. אולם בניגוד לא"ס, אזור ההשפעה אינו אוסף תחומי האלמנטים שסביב הצומת אלא עיגול (בשני מימדים) או כדור (בשלושה מימדים) שהצומת במרכזו, או, עבור צמתים הקרובים לשפה, חלק מהעיגול/הכדור הנמצא בתוך התחום. ראו הציור בצד ימין: אזור ההשפעה סביב צומת פנימי מסומן בקו מרוסק. רדיוס אזור ההשפעה הוא פרמטר של השיטה. פונקציות הצורה אינן פולינומים כמו בא"ס אלא פונקציות מסובכות יותר המתקבלות מבנייה מיוחדת הנקראת "ריבועים-פחותים נעים" (Moving Least-Squares). בנייה זו מבטיחה שהפתרון המקורב יהיה לא רק רציף אלא גם בעל נגזרות רציפות, וכן שניתן יהיה לייצג בצורה מדויקת פולינומים עד דרגה מסויימת. לאחר בניית פונקציות הצורה, השימוש בהן, בתוך פורמולציה ואריאציונית המקורבת בשיטת גלרקין, הוא זהה לזה של שיטת א"ס.

(ג) מהם החסרונות של שח"ר?

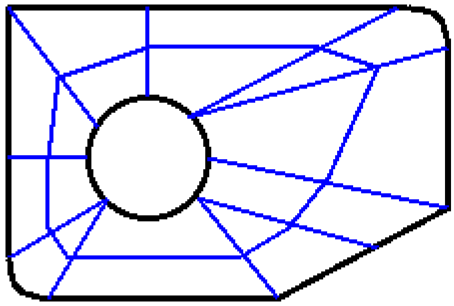
החסרון העיקרי של שח"ר הוא הקושי באכיפת תנאי שפה יסודיים (essential), כלומר תנאים שבהם כופים על הפתרון לקבל ערכים נתונים על השפה, כמו למשל תנאי של שפה רתומה עבור מבנה אלסטי. בעוד שבא"ס אכיפת תנאים כאלה היא פשוטה מאד ולמעשה מובנה לתוך הקירוב, בשח"ר יש לנקוט אמצעים מיוחדים, כגון שימוש בכופלי לגרנז', על מנת לכפות אותם בצורה מקורבת. חסרונות נוספים הם: (1) הסיבוך היחסי בשימוש בפונקציות צורה מיוחדות לא פולינומיאליות, (2) העובדה שגם בשח"ר יש לבצע חישובים גיאומטריים (לעיתים מסובכים, בעיקר בגופים תלת-מימדיים מורכבים שעבורם שח"ר נועדה מלכתחילה...) על מנת לאתר את אזור ההשפעה של כל צומת הקרוב לשפה ועל מנת לבצע את האינטגרציה הכרוכה בשיטת גלרקין, (3) משהו ביופי ובפשטות הבסיסיים של שיטת א"ס ושל הארכיטקטורה התכנותית שלה הולך לאיבוד בשח"ר... אך זה כמובן גם עניין של טעם. נוסף לכך, שח"ר יקר יותר מא"ס בשלב האנליזה, אם כי הוא חוסך הרבה בשלב הטרום-אנליזה (preprocess). לפיכך, עבור בעיות לא-לינאריות תלויות-זמן יתכן כי המחיר הכולל של שח"ר יעלה על זה של א"ס.

(ד) האם לשח"ר יש עתיד בתוכנה מסחרית?

קשה להתנבא. השיטה עדיין "צעירה" מדי וצריכות לעבור עוד מספר שנים לפני שייצבר לגביה נסיון מספיק שיאפשר שילובה באמינות גבוהה בתוכנה מסחרית. כיום השיטה נמצאת עדיין בשלב המחקרי-הבסיסי שלה. גם הניתוח המתימטי של שח"ר עדיין בחיתוליו. בכנסים ניתן לשמוע מצד אחד התלהבות משח"ר ומצד שני ספקנות. בכנס מסויים אחד המרצים התבדח ואמר שמכיוון שלשיטות הללו קוראים meshless methods וגם לפעמים point methods ניתן לשלב בין השמות ולקרוא להן pointless methods ! (ובתרגום אפשרי לעברית: שיטות חסרות שח"ר!) אולם, קיימת הסכמה כיום כי ישנן אפליקציות ספציפיות שעבורן שח"ר היא השיטה האידאלית.

אלמנטים סופיים מסוג **p** ו-**hp** ואלמנטים ספקטרליים

החוברת הראשונה בכרך 53 (שנת 2002) של כתב-העת International Journal for Numerical Methods in Engineering יוחדה לנושא זה. (אחד העורכים של חוברת זו הוא ד"ר זהר יוסיבש, חבר ועד האגודה.) שיטות א"ס מסוג p ו- hp ושיטות א"ס ספקטרליות שונות משיטת הא"ס ה"קלאסית" הנקראת גם שיטת א"ס מסוג h. בגירסת h, ההתקרבות לפתרון המדויק ("ההתכנסות") מתבצעת ע"י עידון הרשת, כלומר ע"י הקטנת האלמנטים (ולכן גם הוספת עוד אלמנטים). השם "גירסת h" בא מהעובדה שגודל אלמנט ממוצע ברשת מסומן בד"כ באות h, ולפיכך ההתכנסות מתבצעת ע"י הקטנת h. לעומת זו בגירסת p מתקרבים לפתרון המדויק בצורה אחרת לגמרי: משאירים את הרשת קבועה, אך מגדילים את דרגת הפולינומים המופיעים בפונקציות הצורה של כל אלמנט, המסומנת בד"כ באות p. לאור זאת, רשת א"ס בגירסת h נראית באופן טיפוסי כאוסף גדול מאד של אלמנטים קטנים פשוטים (כמו למשל אלמנטים משולשים לינאריים), והיא בעלת צפיפות גבוהה בעיקר באזורים בהם צפויים גרדיאנטים חזקים בפתרון. לעומת זאת, רשת בגירסת p נראית באופן טיפוסי כאוסף של מספר קטן של אלמנטים גדולים, לעיתים בעלי שפות עקומות. ראו למשל הציור למטה. האלמנטים שבציור אינם אלמנטים לינאריים אלא אלמנטים מסדר גבוה, כלומר אלמנטים שפונקציות הצורה שלהן הן פולינומים מדרגה p גבוהה.



נענה על מספר שאלות הקשורות בגירסת p ובשיטות המקורבות אליה.

(א) מהם היתרונות של גירסת **p** בהשוואה לגירסת **h**?

בתנאים רגילים (ראו בהמשך), הפתרון המתקבל בגירסת p מתכנס הרבה יותר מהר מאשר זה המתקבל בגירסת h. בגירסת h הפתרון מתכנס בקצב אלגברי בעוד שההתכנסות בגירסת p היא אקספוננציאלית. יתרון נוסף הוא העובדה שהרישות הוא קל בהרבה בשיטת p ושניתן לייצג בדיוק גבוה שפות עקומות. כמו כן, תופעות שונות הגורמות לחולניות (ill-conditioning) של מטריצת הקשיחות, כגון "נעילה" ושכבות גבול, נוטות להעלם בגירסת p עם p מספיק גבוה, בעוד שבגירסת h יש צורך לטפל בהן באמצעים מיוחדים.

(ב) מהי גירסת **hp** ומתי יש להשתמש בה?

לרוע המזל, תכונת ההתכנסות האקספוננציאלית של גירסת p מתקיימת רק כל עוד הפתרון המדויק הוא מספיק חלק. במקרים רבים ישנם אזורים בהם הפתרון אינו חלק לחלוטין. (דוגמה קיצונית היא נוכחות של סדק בתחום הפתרון.) באזורים אלו ההתכנסות בגירסת p מקבלת את האופי הבא. תחילה, עם הגדלת דרגת הפולינומים p בפונקציות הצורה, השגיאה יורדת בקצב אקספוננציאלי. אולם כאשר מגיעים לרמה מסויימת של p קצב ההתכנסות יורד בצורה דרסטית, וההתכנסות נעשית איטית ביותר. במצב כזה, הגדלה נוספת של p אינה יעילה להורדת השגיאה. לפיכך, מאותו רגע יש לקבע את p באותו אזור ולהקטין את גודל האלמנטים h. כללית, בכל שלב בתהליך ההתכנסות כל אלמנט ברשת יכול להיות מטופל בנפרד בעידון מסוג p או מסוג h. שיטת התכנסות מעורבת כזו נקראת שיטת hp.

(ג) האם גירסת **p** חדרה לתוכנת הא"ס המסחרית?

כן. ישנו כיום לפחות מוצר תוכנה מסחרי אחד שמבוסס ברובו על שיטת א"ס מסוג p. כמו כן, למוצרי תוכנה "ותיקים" רבים נוספו בשנים האחרונות גם אלמנטי p.

(ד) מה ההבדל בין א"ס מסוג **p** וא"ס ספקטרליים?

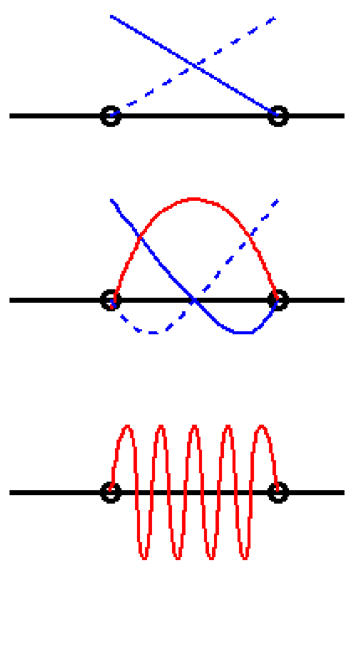
ישנן משפחות שונות של אלמנטים מסוג p, ואלמנטים ספקטרליים יכולים להחשב כמשפחה אחת כזו. משפחות אחרות הן, למשל, אלמנטי p לגרנז'יים ואלמנטי p הירר'כיים. ההבדלים בין המשפחות אינם מהותיים ובאים לידי ביטוי בפרטי השיטה: מיקום הצמתים, אופן הגדרת הפולינומים המהוים את פונקציות הצורה, מיקום נקודות האינטגרציה, וכו'. היסטורית, א"ס מסוג

p צמחו מתוך שיטת הא"ס הסטנדרטית, בעוד שא"ס ספקטרליים צמחו בעיקר משיטות ספקטרליות קלאסיות "גלובליות". אולם העיקרון בשני המקרים זהה.

שיטות "העשרת המרחב"

החל מסוף שנות ה- 90 החלו להופיע שיטות א"ס שונות, כגון Partition of Unity Method (PUM), Generalized Finite Element Method (GFEM), eXtended Finite Element Method (XFEM), Discontinuous Enrichment Method (DEM) ועוד, שניתן לכנותן במשותף שיטות "העשרת המרחב" (Space Enrichment Methods). הרעיון הבסיסי הוא להעשיר את המרחב הנפרש ע"י פונקציות הצורה הסטנדרטיות ע"י שימוש בפונקציות צורה נוספות שמתאימות באופן מיוחד לאופי הפתרון שאותו מחפשים.

לדוגמה, נניח שאנו פותרים בעיית גלים שפתרונה אמור להיות מורכב מגלים בעלי אורך-גל קצר (כלומר תדר מרחבי, הנקרא גם "מספר גל", גבוה). פתרון כזה יאופיין ע"י אוסילציות מהירות. שימוש בפונקציות צורה סטנדרטיות, כגון פונקציות לינאריות או פרבוליות, יתן פתרון בעל דיוק סביר אך ורק אם האלמנטים קטנים משמעותית מאורך הגל. על פי "חוק אצבע" ידוע, יש להשתמש לפחות ב- 10 אלמנטים לאורך-גל אחד. פירוש הדבר שיש צורך ברשת עדינה מאד כדי לקבל רזולוציה נאותה. אם הגלים המופיעים בפתרון הם בעלי אורך-גל גבוה מאד, נקבל אילוץ על עדינות הרשת שקשה או לפעמים בלתי-אפשרי לקיימו. בשיטת "העשרת המרחב" אנו מתגברים על הקושי מבלי הצורך לעדן את הרשת: אנו מוסיפים לפונקציות הצורה הסטנדרטיות פונקציות מיוחדות בעלות אוסילציות מהירות, המאופיינות ע"י אותו אורך-גל אותו אנו מצפים למצוא בפתרון. הרעיון מודגם, במקרה החד-מימדי, ע"י הציור הבא:



פונקציות הצורה העליונות הן הפונקציות הלינאריות, האמצעיות הן הפונקציות הפרבוליות, ואילו פונקצית הצורה התחתונה היא דוגמה לפונקציה בעלת אוסילציות גבוהות שהוספה כהעשרה.

דוגמה נוספת למקרה בו העשרת מרחב הא"ס היא חשובה הוא המקרה שבו התחום החישובי כולל סדק. קשה מאד לפתור בעיה כזו עם א"ס סטנדרטים. בשיטת "העשרת המרחב" מוסיפים פונקציות צורה מיוחדות המתארות בצורה ישירה את אי-הרציפות משני עברי הסדק ואת הסינגולריות בקצה הסדק. השיטה יעילה במיוחד כאשר היא מופעלת עבור אנליזה שבמהלכה הסדק מתפשט.

שיטות "העשרת המרחב" נמצאות עדיין בשלבי מחקר ראשוניים.

חידת צופן אישח"מ

להלן אימרה הקשורה למכניקה חישובית. האימרה הוצפנה ע"י כך שכל אות בא"ב הוחלפה באות אחרת:

בטרע זטבהאטמ רהאע פסטתע כעטהמ

ני יגהטדמ הני טפטאע. צע שהאק

יעיבור בכ וטרס כדח.

להלן 5 הגדרות שיעזרו בפיצוח הצופן:

1. שיטה העוברת בתורשה: לכנהסטמי נשרט

2. טובה לדיג סרדינים מדויק: סבמ קגטשע

3. התנהגות של חבר'ה סולידיים:

יתשטדמ עיהפדטי

4. עוסקת בעניינים זזים ונזילים:

גטשיטדמ עצהסיטי

5. יעיל בזכות חלוקת סמכויות: יזבא ידאטכט

לנוחיותכם סרגל הא"ב שמעליו ניתן לכתוב את מפתח הצופן:

אבגדהוזחטיכלמנסעפצקרשת

נא שלחו את המפתח המלא למערכת. הפתרון יפורסם בגליון הבא.