

עלון

אישח"מ

עלון האיגוד הישראלי לשיטות חישוביות במכניקה

מספר 9

מרץ 2003

עורך: דן גבעולי, הפקולטה להנדסת אוירונאוטיקה וחלל, טכניון, חיפה 32000,
טל. 8293814 (04), פקס 8231848 (04), דואר אלקטרוני: givolid@aerodyne.technion.ac.il
חברי ועד אישח"מ: עמנואל אור (מזכיר-גזבר), מיכאל אנגלמן, פנחס בר-יוסף, דן גבעולי,
יצחק הררי (נשיא), יונתן טל, זהר יוסיבש
איש-קשר עם ECCOMAS: מישל ברקובייר
ועדת ביקורת: איתן כוכבי, משה פוקס
אתר אישח"מ (IACMM) באינטרנט: <http://www.iacmm.org.il>
רישום לחברות באגודה ופרטים נוספים: באתר האגודה הנ"ל, או פנו למזכיר-גזבר,
ד"ר עמנואל אור, טל. 9908640 (04), פקס 9908164 (04), דואר אלקטרוני: emanuelo@rafael.co.il

הערות העורך:

נא שלחו לכתובת המערכת (בדואר אלקטרוני או רגיל) חומר לפרסום בעלון. ניתן ורצוי לצרף ציורים ותמונות. לידיעת חברות: ניתן גם לפרסם חומר מסחרי- פרסומי בתשלום. לפרטים נא לפנות למערכת. גירסה צבעונית של עלון זה מופיעה באתר האגודה (ראה לעיל).

חידוש רישום באגודה:

אנא הרשמו כחברים באגודה או חדשו את חברותכם! טופס רישום עם פרטים מלאים ניתן למצוא באתר
<http://www.iacmm.org.il/member>

חדשות אישח"מ

יום העיון ה- 13 של אישח"מ התקיים ב- 10 באוקטובר באוניברסיטה העברית בירושלים בהצלחה רבה. יום העיון נהנה מהחסות הנדיבה של חברת **CRAY**. המארגן המקומי היה מישל ברקובייר. הרצאת פתיחה מעניינת ביותר, על מודלים חישוביים עבור אלקטרולוזה של אלומיניום, ניתנה ע"י Michel Romerio מ- EPFL בלזון, שוויץ.



בתמונות: מימין – נשיא האגודה יצחק הררי מעניק תעודות לזוכים בתחרות ההרצאות השניה של אישח"מ: ויקטוריה סופוניצקי (מקום ראשון) ושמאל קידר (מקום שני). למעלה, מהפינה הימנית העליונה בכוון השעון: ד"ר Romerio, מבט אל חלק מהקהל, שלושת אנשי החישוב המקבילי/וקטורי, והמארגן המקומי.

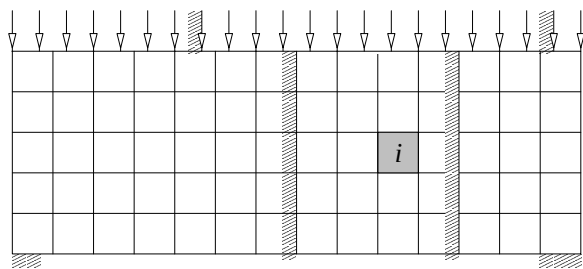


העומסים וכמות החומר נתונים והמבנה האופטימלי מופיע, *ex nihilo* (יש מאין), כביכול.

כבר ב-1904 פרסם Michell מאמר מרשים בתכן טופולוגי. מבני מישל, שהם יצורים תאורטיים לחלוטין, מעין מקבילות של מעגלי קרנו בתרמודינאמיקה, מהווים גבול תחתון לכמות החומר הדרושה למבנה כדי לעמוד בעומסים נתונים ובאילוצי מאמצים נתונים. מלבד עבודות ספורות בנושא (ראה פרסומים של Prager וגם של Rozvany) לא התקדם הנושא בצורה משמעותית. ואז הופיע המאמר של Bendsoe and Kikuchi (1988). העבודה הזו הניבה מאות פרסומי המשך ומעסיקה את קהיליית האופטימיזציה עד עצם ימים אלה. בפסקה הבאה אנסה לתאר בלשון שווה לכל נפש (מדעית) במה מדובר.

שיטה נומרית לתכן טופולוגי

מתחילים באמת כמעט מכלום. נתונים אזור התכן שבו המבנה אמור להימצא, תנאי הגבול (התמיכות), כמות החומר העומדת לרשותנו והעומסים החיצוניים, ומבקשים לייצר את המבנה האופטימלי לבעיה זו. באיור 1 רואים דוגמא של אזור תכן מלבני בעובי קבוע, הרתום בשתי הפינות התחתונות, ונתון גם עומס פרום אחיד לאורך השפה העליונה. הדרישה היא למלא את אזור התכן במבנה הנושא את העומסים בצורה אופטימלית תוך שימוש בכמות חומר $x_0 v_0$ כאשר v_0 הוא נפח אזור התכן ו- x_0 הוא היחס הנפחי הממוצע של החומר.



איור 1

בשיטה הקלאסית של תכנון טופולוגי בוחרים בגמישות (compliance) של המבנה כפונקצית מטרה והבעיה הופכת לתכנון של מבנה בעל גמישות מינימאלית (קשיחות מקסימאלית) תחת עומס נתון ועבור כמות חומר נתונה. לצורך זה מרשטים את אזור התכן ע"י חלוקה לאלמנטים סופיים ומניחים שבכל אלמנט i קיים חומר נקבובי, בעל

צפיפות x_i , עם מטריצה עשויה מהחומר הנומינלי.

הצפיפויות של כל האלמנטים הן כעת משתני התכן של הבעיה. עבור צפיפות $x_i = 1$ האלמנט יהיה מלא חומר

ואם $x_i = 0$ האלמנט יהיה ריק (לצפיפויות ביניים, ראה בהמשך). הרעיון הוא שהרבה קומבינציות של צפיפויות 0 או 1 מגדירות מבנה ומתוך המכלול הרב של תצורות מבנה אלה היינו רוצים לקבל את המבנה המתאים ביותר, כלומר הקשיח ביותר תחת העומסים הנתונים. ניתן כעת להגדיר את הבעיה

$$\begin{aligned} \min_x u^T K u \\ v^T x = v_0 x_0, \\ 0 \leq x \leq 1 \end{aligned}$$

סדנה במתימטיקה שימושית וחשוב מדעי

ב-2-3 בפברואר, 2003, נערכה באוניברסיטה העברית בירושלים סדנה במתימטיקה שימושית וחשוב מדעי בהשתתפות חוקרים מצרפת ומהארץ. המארגנים היו Olivier Pironneau מפרס ומישל ברקובייר. בנוסף לערך המדעי הרב של הסדנה, היתה לה חשיבות מיוחדת עקב העובדה שקבוצה של חוקרים ידועי-שם מצרפת בחרו לבוא בזמנים קשים אלו לישראל ולהביע הזדהותם.

ISCM-14

יום העיון ה-14 יתקיים ב-3 באפריל 2003, בטכניון. המארגנים המקומיים הם פנחס בר-יוסף ודן גבעולי. תוכנית ראשונית מופצת יחד עם עלון זה.

תכן טופולוגי של מבנים: מבוא קצר



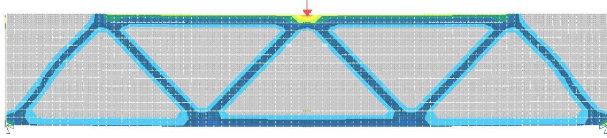
פרופ' משה פוקס
המחלקה למכאניקה, חומרים ומערכות
הפקולטה להנדסה, אוניברסיטת ת"א
fuchs@eng.tau.ac.il

ב-1960 התקיים בפיטסבורג שבארה"ב של אמריקה הכנס השנתי השני לחישוב אלקטרוני (Second Annual Conference of Electronic Computation), כך קראו לזה פעם. בכנס הוצגו, בין היתר, מאמר של Clough ועמיתיו בו מופיע לראשונה המונח Finite Elements ומאמר של L. A. Schmit, ככל הנראה הפרסום הראשון על אופטימיזציה ממוחשבת של מבנים. ארבעים שנה עברו והאלמנטים הסופיים הפכו ללחם חוקם של רבבות מדענים בכל תחומי המדעים המדויקים וההנדסה. לעומת זו התכן האופטימלי של מבנים הוא התמחות שעדיין שייכת בעיקרה לתחום המחקר היישומי. לעיתים אני תוהה על שני הנושאים האלה, Finite Element Analysis (FEA) ו-Optimum Structural Design (OSD) שהתחילו באותו זמן בערך אך בעוד הראשון נסק לגבהים מרשימים השני נראה מקרטע באוניברסיטאות ובמכוני המחקר וטרם נשמע ברצינות בתעשייה. ניתן למצוא הרבה הסברים למצב עניינים זה. להערכתי הסיבה המרכזית היא שבעיית האנליזה של מבנים היא בעיה לינארית בעיקרה ובעיית התכן של מבנה היא בעיה לא-לינארית (איך נאמר במבוא להרבה מאמרים בתחום? "A highly non-linear problem", מבלי לפרט). וכידוע, מי שמתעסק בתחום לא לינארי מועד לפרוענות. אבל הבחירה היא לא בידנו. השטח של תכן מבנים הוא לא-לינארי, וכך הוא יישאר, ולכן מדובר בתחום הנדסי אמנם קשה ומסובך אך מעניין ומרתק מעין כמוהו.

פרופסור אורי קירש מהפקולטה להנדסה אזרחית בטכניון הציע בעבר חלוקה סכמאטית של OSD לשלושה תחומים אשר גם חופפים במידה רבה את ההתפתחות היסטורית: (1) תכן קשיחות בו נתון המבנה (ותכים, עוביים) מלבד הקשיחויות, (2) תכן גיאומטרי כאשר גם הצמתים הם משתנים ו-(3) תכן טופולוגי כאשר רק תנאי הגבול,

הצבעים מתארים את רמת המאמצים כאשר אדום מסמל מאמץ גבוה (אגב, רוב המבנה בלחיצה).

דוגמא אחרת, המופיעה באיור 3, היא תכנון של קורה על שני סמכים פשוטים תחת עומס שדה מרוכז. מרחב התכנון הוא האזור באפור והתכנון התחילי היה פריסה אחידה של חומר נקבובי עם צפיפות קבועה. כאן השתמשנו בקריטריון ה-FSD ונאמן לתכנון של מבנים כאלה תחת מקרה עמיסה יחיד, הפתרון הוא מסוים סטטי.



איור 3

העניין בפתרונות ה"ל" הוא שמקורם בתכנון תחילי הומוגני עם צפיפות יחסית אחידה. כלומר המתכנן כמעט ולא השפיע על התוצאה הסופית בדמות תכנון תחילי שיכול היה לנתב את התוצאה לסוג זה או אחר של מבנה. התקווה שטמונה בשיטות אלה היא שבמקרים בהם לא קיימות פרדיגמות מוכחות של פתרונות מבניים (כגון מפעילים פיאזולקריים, מבני MEMS, עמיסות יוצאות דופן, ואחרים) תוכל הגישה זו להציע את התצורות הרצויות.

בעיות נומריות

לא הכל ורוד בעולם הטופולוגי. כצפוי, קיימות בעיות בדרך, חלקן פתורות, וחלקן עדיין פתוחות לדיון ולשיפור. נמנה אחדות מהן.

(1) אחת השאלות הצצות מן הרגע הראשון היא מה פשר של תוצאות המכילות צפיפויות ביניים, כלומר אזורים בהם $0 < x_i < 1$? ובאמת קיימות שתי קבוצות אפשריות של תוצאות: כאלה המאפשרות צפיפויות ביניים, והעניין בהן הוא בעיקר בייצור חומרים עתידיים, וכאלה הדורשות דיכוטומיה, $x_i = 0/1$, במטרה לא מוצהרת לאפשר יישום של כמה מהפתרונות. בסקירה זו נתרכז בתצורות 0/1.

(2) השאלה הבאה היא מהן התכונות האפקטיביות של החומר הנקבובי ממנו עשוי כל אלמנט? הרבה חוקרים עסקו בזה והציעו שלל של מודלים מיקרו-מכאניים. במרחב ה-0/1 גובר השימוש בחומר היפותטי הקרוי SIMP עבורו מודול האלסטיות כתלות בצפיפות הוא $E_i = E_0 x_i^\eta$ כאשר E_0 הוא מודול האלסטיות של המטריצה ו- η הוא מקדם קנס. בדרך כלל לוקחים $2 \leq \eta \leq 4$. מסתבר כי השימוש ב-SIMP גם עוזר לקבלת פתרונות 0/1, ללא צפיפויות ביניים.

(3) השיטה לעיתים מלווה במעין רעש בדמות Checkerboarding או היווצרות אזורים בהם לאלמנטים סמוכים צפיפויות 01010 בשני הכיוונים בתבנית לוח שחמט. התופעה נחקרה במספר פרסומים ומתקבל הרושם כי חלק מן הבעיה נעוצה בשימוש באלמנטים ב-לינארים עבור האנליזה. מסתבר כי הטעות בקירוב לאלמנטים סופיים של תצורת 01010 היא גדולה מאד. המודל לעין ערוך יותר קשיח ממה שהוא באמת ולכן האלגוריתמים נוטים לייצר אזורים כאלה. הפתרונות שהוצעו הם שימוש באלמנטים מסדר גבוה יותר, פרוס הצפיפויות בעזרת מסנן מתאים, הגבלת אורך הגבול במעברים 0/1, ועוד. אף שיטה אינה מספקת תשובה מכרעת לכל המקרים.

כאשר u הוא וקטור ההזזות בצמתים, K הוא מטריצת הקשיחות של המבנה, v הוא וקטור הנפחים של האלמנטים ו- x הוא וקטור הצפיפויות באלמנטים. אילוץ השוויון מכתוב את כמות החומר (הפרמטר הוא x_0) ואילוץ האי-שוויון מגבילים את הצפיפויות לגדלים פיזיקאליים. לא נותר אלא לפתור את הבעיה, שלה הרבה משתני תכן (ככל שהסריג צפוף יותר, תצורת המבנה תהיה חדה יותר) ורק אילוץ שוויון אחד. כל שגרת מינימיזציה מתאימה היא תקפה לשימוש אך תכנה שוודית, MMA, די נפוצה (הסקנדינבים, ובמיוחד הדנים, מאד פעילים בשטח).

במאמר המקורי השתמשו בקריטריון אופטימליות כדי להגיע לאופטימום. (ההבדל בין השימוש בקריטריון אופטימליות לבין שגרה של תכנות מתמטי הוא שעבור האחרונה מנחיתים הדרגתית את פונקציית המטרה עד שהיא נעצרת במינימום מקומי. עם קריטריון אופטימליות מנסים לפתור את המשוואות המקיימות את תנאי האופטימליות). ע"י גזירת הלגרנג'יאן של הבעיה ה"ל" לפי הצפיפויות ולפי הכופל לגרנג' ניתן לכתוב תנאי אופטימליות מן הצורה $B_i(x) = 1$, כאשר $B_i(x)$ הוא כמובן פונקציה של הצפיפויות. כדי להגיע לתכן שמקיים את התנאים האלה מכפילים את שני הצדדים של המשוואה ב- x_i ויוצרים את הלולאה

$$(1) \quad x_i^{k+1} = (B_i x_i)^k$$

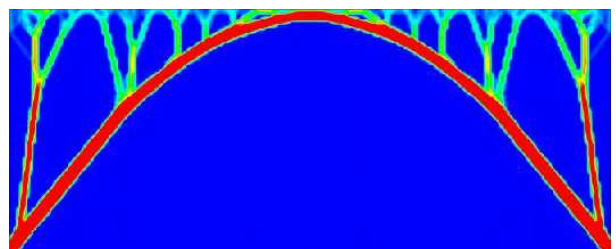
בצרוף תנאים מהסוג $\text{if } x_i^{k+1} \geq 1 \text{ then } x_i^{k+1} = 1$.

שיטה יוריסטית זו עובדת להפליא (אגב, היא נקראת יוריסטית משום שאיש לא הוכיח התכנסות). חשוב לציין כי תוצאות טובות גם התקבלו עם תנאי אופטימליות מן הסוג Fully Stressed Design (FSD) בו התנאי הוא $\sigma_i = \bar{\sigma}$ כאשר $\bar{\sigma}$ הוא מעין מאמץ ממוצע. במקרה זה

$$B_i(x) = \sigma_i(x) / \bar{\sigma} \quad \text{Ratio}$$

$$x_i^{k+1} = (\sigma_i(x) / \bar{\sigma})^k x_i^k$$

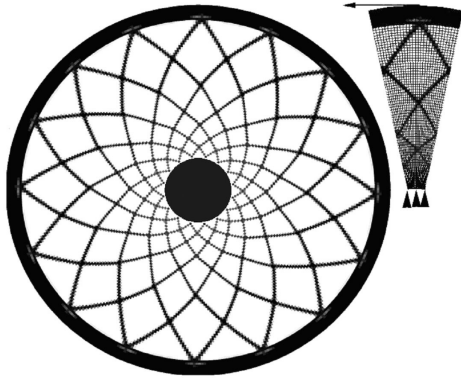
למותר לציין כי המשוואה האחרונה היא פעמיים היוריסטית: (א) אין הוכחה כי תכנון FSD הוא אכן אופטימלי ו-(ב) אין הוכחה כי האיטרציות ה"ל" מתכנסות. אבל, זה עובד. מתחילים עם צפיפות אחידה x_0 , מבצעים אנליזת FE של המבנה, עבור כל אלמנט מחשבים את $B_i(x)$ ומפעילים את האיטרציה (1), ושוב אנליזה, וחוזר חלילה עד שהפתרון מקיים את התנאים שהציבו לו.



איור 2

תוצאה יפה ניתן לראות באיור 2 שמתאים לבעיה שהוגדרה באיור 1. מה שמתקבל הוא פתרון קלאסי של קשת פרבולית שהוא האלמנט הנושא הראשי בתוספת של עמודים, דמוי עצים, שתפקידם להעביר את העומס הפרוס מהשפה העליונה של אזור התכנון אל הקשת ומשם לסמכים.

נקבובי. על אף הקשיים הנומריים ניתן לקבל תוצאות העומדות במבחן התכנן ההנדסי. נגענו בקצה הנושא למעוניינים מומלץ לדפדף בעותקים של השנים האחרונות *Journal of Structural and Multidisciplinary Optimization*.



איור 5

מקורות

MP Bendsoe (1995) *Optimization of structural topology, shape and material*. Springer, Berlin.

תודות

כל התוצאות הנומריות במאמר זה הן פרי מחקרו של אייל מוזס, דוקטורנט במחלקה למכניקה, חומרים ומערכות, בהנחיית המחבר וד"ר שמואל רבקין.

פתרון חידת צופן אישח"מ מהגליון הקודם

האימרה המוצפנת היא:
שיטה חישובית טובה צריכה להיות גם מדויקת וגם יציבה.
זה נובע מהמשפט של פיטר לקס.

הגדרות הן:

1. אלגוריתם גנטי.
2. רשת עדינה.
3. מכניקת המוצקים.
4. דינמיקת הזורמים.
5. מחשב מקבילי.

מפתח הצופן הוא (האם אתם רואים את החוקיות?):
בשדקופחסימלאתגרהצדעטנכ

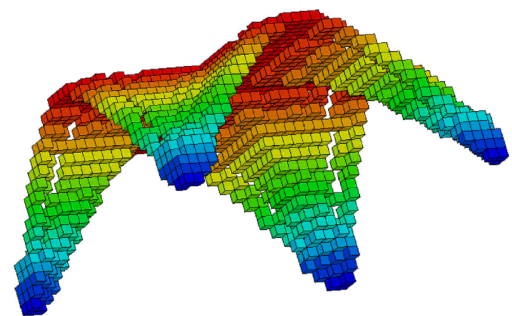
פתרו נכונה: רמי בן-צבי, יצחק הררי.

פינת הלשון

שגיאה (error): ההבדל הבלתי נמנע בין הפתרון האמיתי של הבעיה לבין הפתרון המקורב המושג בשיטה נומרית.
טעות (mistake): ההבדל (שאסור שיהיה!) בין דרך נכונה ובלתי נכונה לפתרון בעיה. בשפה תכנותית: באג!

תוצאות נוספות

המקרה הבא מטפל בכוחות מחליקים. אולי שמתם לב כי קבענו שבשיטה הטופולוגית המתכנן כמעט לא מעביר שום הנחיות לאלגוריתם באשר לתצורה הסופית. ה'כמעט' התייחס לעובדה שמיקום כוחות הוא פרמטר מכריע בתכנן מבנה. כדי להחליש גם את התנאי הזה כללנו את מיקום הכוח, לאורך קו הפעולה שלו, כפרמטר תכן, במקומות שזה ניתן. כמה תוצאות היו מפליאות. ביניהן הדוגמא שמתוארת באיור 4. הבעיה היא בעצם הרחבה של המקרה המישורי למרחב תכן 3D. אזור התכן הוא כעת קובייה התמוכה בארבע פינותיה התחתונות ועמוסה בכוח פרוס אחיד הפועל על המישור העליון. אולם הפעם הכוחות הם מחליקים, כלומר, העומסים הפרוסים יכולים להימצא בכל מקום לאורך קו הפעולה שלהם. ה'מבנה' התחילי הוא קובייה הומוגנית עשויה מחומר נקבובי בצפיפות $x_0 = 0.1$ ואזור התכן רוסת הפעם באלמנטי לבנה.



איור 4

מה שמתקבל הוא מבנה תלת-מימדי, רב קשתי הדומה להפליא למצוי בהרבה כנסיות ומסגדים מימי הביניים. הצבעים מתארים הפעם גבהים. במבחינה מבנית כדאי להיות ער לעובדה שהמבנה גם מכתוב את המיקום האופטימלי של העומס הפרוס (באמצע למעלה וסמוך לפינות למטה, לדוגמא).

כיוון אחר בו יישמנו את השיטה הטופולוגית הוא בתכנן אופטימלי של מבנים מחזוריים. בעבודות של Ryvkin and Muller פותחה שיטת התא המייצג לפתרון בעיות של מבנים מחזוריים תחת עמיסה סטטית כלשהי. הטכניקה מבוססת על התמרת פורייה הבדידה ומובילה לאנליזה של תא אחד בלבד. מכיוון שעקב המחזוריות של המבנה התכן גם מוגבל לתא אחד מבנים כאלה מאפשרים פתרון נומרי יעיל.

נדגים תוצאה אחת שהתקבלה עבור אזור תכן בצורת דיסק עם גבול פנימי וחיצוני מעגלי (ראה איור 5). הדיסק רתום לאורך הגבול הפנימי ופועל עליו כוח משיק אחד בגבול החיצוני. הסימטריה המעגלית הוכתבה כ-16 גזרות זהות. התא המייצג רוסת ב- 27×70 אלמנטים ועבורו התקבל הפתרון האופטימלי (ראה הגיזרה בפינת האיור). הצדוף של 16 הגזרות יצר את הגלגל האופטימלי. כפי שניתן לראות, הפתרון מורכב מחישוק חיצון וסידרה של אלמנטים ספיראליים המזכירים מבנה מישל. החישוק משתף את יתר המבנה בנשיאת העומס. הגדלת הסימטריה מובילה לפתרונות מאותו סוג אך גמישים יותר, כצפוי.

סיכום

ראינו את השיטה הנומרית לקבלת טופולוגיות למינימום גמישות בעזרת משתני תכן רציפים, הצפיפויות של חומר