עלון

אישח"מ

עלון האיגוד הישראלי לשיטות חישוביות במכניקה

ספטמבר 2003 מספר 10

עורך: דן גבעולי, הפקולטה להנדסת אוירונוטיקה וחלל, טכניון, חיפה 32000,
טל. 8293814 (04), פקס 8231848 (04), דואר אלקטרוני: givolid@aerodyne.technion.ac.il

אתר אישח"מ (IACMM) באינטרנט: http://www.iacmm.org.il
רישום לחברות באגודה ופרטים נוספים: באתר האגודה הנ"ל, או פנו למזכיר-גזבר,
ד"ר עמנואל אור, טל. 9908640 (04), פקס 9908164 (04), דואר אלקטרוני: emanuelo@rafael.co.il

הערות העורך:

נא שלחו לכתובת המערכת (בדואר אלקטרוני או רגיל) חומר לפרסום בעלון. ניתן ורצוי לצרף ציורים ותמונות. לידיעת חברות: ניתן גם לפרסם חומר מסחרי- פרסומי בתשלום. לפרטים נא לפנות למערכת. גירסה צבעונית של עלון זה מופיעה באתר האגודה (ראו לעיל).

חידוש רישום באגודה:

אנא הרשמו כחברים באגודה או חדשו את חברותכם! טופס רישום עם פרטים מלאים ניתן למצוא באתר http://www.iacmm.org.il/member.
כמו כן, ניתן להרשם לפורום הדיוור האלקטרוני של האגודה (בחינם) באתר http://listserv.tau.ac.il/archives/iacmm-l.html .

חדשות אישח"מ

- יום העיון ה- 14 של אישח"מ התקיים בטכניון ב- 3.4.03 בהצלחה רבה. המרצה המוזמן היה ד"ר רימון אריאלי מרפא"ל שדיבר על "CFD במבט אישי" ונתן סקירה מאלפת על מצב הידע בתעשיה בנושא זה (ראו כתבה בהמשך).
- יום העיון ה-15 של אישח"מ יתקיים ב- 23.10.03 באוניברסיטת ת"א. המארגנים המקומיים הם סלבה קרילוב ואלכסנדר גלפגט. תוכנית ראשונית מופצת יחד עם עלון זה. ראו עדכונים באתר האגודה.
- יום העיון ה-16 צפוי להתקיים ב- 25.3.04 (תאריך טנטטיבי) באוניברסיטת חיפה, המארחת את יום העיון שלנו לראשונה. יום העיון יערך בחסות "קרן קיסריה רוטשילד" (CRI), ומבטיח להיות לא רק מעניין מבחינה מקצועית אלא גם יוצא דופן מבחינת האירוח והכיבוד.
- בתחרות ההרצאות השלישית שנערכה במסגרת ימי העיון ה-13 וה-14 זכה במקום הראשון מר נועם שמש, סטודנט במח' למכניקה, חומרים ומערכות באונ' ת"א. מר שמש יסע בתמיכת אישח"מ לכנס ECCOMAS-2004 שיערך בפינלנד בקיץ הבא, ויציג שם את עבודתו כנציג אישח"מ. במקום השני זכה מר לאוניד צ'רנין, סטודנט בפק' להנדסה אזרחית בטכניון. מר צ'רנין זכה בחברות באישח"מ למשך 3 שנים. טקס הענקת תעודות הזכיה יתקיים במסגרת יום העיון ה-15.

מה החגיגה?

קוראינו הותיקים הבחינו בודאי במתכונת החגיגית במיוחד של גליון זה (8 עמודים במקום 4). הסיבה לכך היא **שאנו חוגגים 10 שנים להולדת אישח"מ!** האיגוד נולד מבחינה רעיונית בסוף 1993 ע"י (בסדר אלפביתי) פנחס

בר-יוסף, דן גבעולי ויצחק הררי, נרשם אצל רשם העמותות באמצע 1994, והחל בפעילות מסיבית ב-1995. במשך 8 השנים האחרונות אישח״מ גדל ועתה מונה עשרות רבות של חברים מהאקדמיה ומהתעשייה. כיום אישח״מ הוא הגוף המוביל בישראל בנושא מכניקה חישובית.

אחד ממוקדי הפעילות של אישח״מ הוא יום-העיון בנושא מכניקה חישובית שנערך בשנים האחרונות פעמיים בשנה. ארבעה-עשר ימי העיון שהתקיימו עד כה, כולם בהצלחה מרובה, הם (שמות המרצים המוזמנים מצויינים בסוגריים):

1. דצמבר 1995, טכניון
2. אוקט׳ 1996, אונ׳ ת״א (שלום אברבנאל, דן גבעולי)
3. אפריל 1997, טכניון (אמנון ברק, אברהם פרנקל)
4. אוקט׳ 1997, אונ׳ בן-גוריון (דב שוורץ, הלל טל-עזר, מוטי קרפל, יוסף פלקוביץ׳)
5. אפריל 1998, אונ׳ ת״א (מיכאל אנגלמן, ברי גרינברג) – יום עיון בנושא שיטות חישוביות לבעיות אנרגיה
6. אוקט׳ 1998, טכניון (Rafael Haftka)
7. אפריל 1999, אונ׳ בן-גוריון (מישל ברקוביר, משה פוקס)
8. ינואר 2000, אונ׳ עברית (שרה יניב, פנחס בר-יוסף)
9. אוקט׳ 2000, טכניון (יצחק הררי)
10. מרץ 2001, אונ׳ ת״א (יורם לניר)
11. אוקט׳ 2001, אונ׳ בן-גוריון (אכי ברנדט)
12. אפריל 2002, טכניון (Olivier Pironneau)
13. אוקט׳ 2002, אונ׳ עברית (Michel Romerio) – יום עיון בתמיכת Cray
14. אפריל 2003, טכניון (רימון אריאלי)

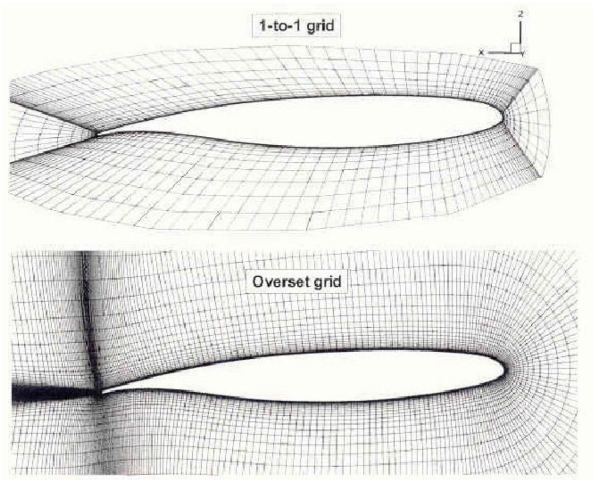
החל מיום העיון השישי התחלנו במסורת ה״לומדה״ – הרצאה ארוכה שבה מומחה בתחום מסוים מלמד את הקהל את יסודות התחום בשפה שווה לכל נפש. הלומדות עד כה היו כולן מאלפות וקיבלו ביקורות אוהדות מהקהל. לא פעם שמעתי את אחד מחברי אישח״מ יוצא מלומדה ומצהיר: ״זו הפעם הראשונה שהבנתי באמת את הנושא הזה״... הלומדות שניתנו עד כה הן:

1. שיטות רב-סריג, עירד יבנה (יום העיון ה-6)
2. כלי CAD, מישל ברקוביר (יום העיון ה-8)
3. שיטות אלמנט-סופי מסוג p, זוהר יוסיבש (יום העיון ה-9)
4. חישובי על (חישוב מקבילי ווקטורי), משה גולדברג (יום העיון ה-10)
5. אופטימיזצית מבנים, משה פוקס (יום העיון ה-12)
6. אנליזה אוירואלסטית, מוטי קרפל (יום העיון ה-13)
7. אנליזת יציבות הידרודינמית, אלכסנדר גלפגט (יום העיון ה-14)

בנוסף לימי העיון, אישח״מ מקיים פעילויות שונות, כגון תחרויות הרצאות נושאות פרסים, פרסום עלון זה, מעורבות בפעילויות של האיגוד הבנ״ל IACM והאיגוד האירופאי ECCOMAS והפצת פרסומיהם, ועוד.

CFD עבור אנליזה אוירודינמית – הערכה

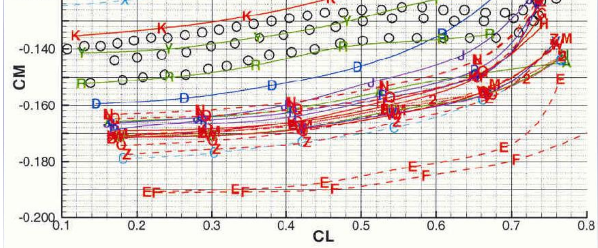
בקיץ 2001, הועדה לאוירודינמיקה שימושית של המכון האמריקאי לאוירו-חלל AIAA ערכה סדנה מיוחדת לבדיקת מצב הידע והיכולת של מכניקת זורמים חישובית (CFD) עבור שימושים תעשיתיים של אנליזה אוירודינמית. הועדה החליטה להתרכז בחיזוי של פרמטרים גלובליים כגון מקדמי גרר, עילוי ומומנט עלרוד הפועלים על מטוס בתחום התת-קולי והעבר-קולי. נבחרה קונפיגורציה ותנאי טיסה מסויימים, וקבוצות ממכוני מחקר שונים, כולל NLR (מכון הולנדי), ONERA (צרפתי) ו-DLR (גרמני), בנו מודל חישובי והגיעו לתוצאות בעזרת תוכנות CFD שונות העומדות לרשותן. דו״ח המתאר את התוצאות ומשווה ביניהן פורסם ב-2002. במסגרת הרצאת מפתח ביום-העיון ה-14 של אישח״מ, סקר ד״ר רימון אריאלי מרפא״ל תוצאות מפתיעות אלו. אנו מביאים כאן על קצה המזלג קטעים מתוך הרצאתו. הגרפים מתפרסמים כאן באדיבותו של ד״ר אריאלי.



איור 1: שני סוגי רשתות מסביב לפרופיל הכנף.

המודלים הנומריים השונים שהורצו על הבעיה הנתונה היו שונים זה מזה במובנים רבים: רשתות שונות (ראו איור 1 לדוגמה), מודלי טורבולנציה שונים, ושיטות פתרון שונות (הפרשים סופיים מסוגים שונים, נפחים סופיים, אלמנטים סופיים, שיטות ספקטרליות וכו׳). התוכנות שהשתתפו בפרויקט ההשוואה כללו את ++CFD, Fluent5, Falcon, Overflow, CFL3D, ותשע אחרות. המודלים כללו כ-3 מליון נקודות רשת עבור הרשתות הסדורות (structured) וכ-9 מליון נקודות רשת (או במקרה אחד 19 מליון) עבור הרשתות הבלתי סדורות (unstructured). לא הוצבו שום מגבלות על זמן החישוב, והוא אף לא נכלל בהשוואת התוצאות בין הקבוצות.

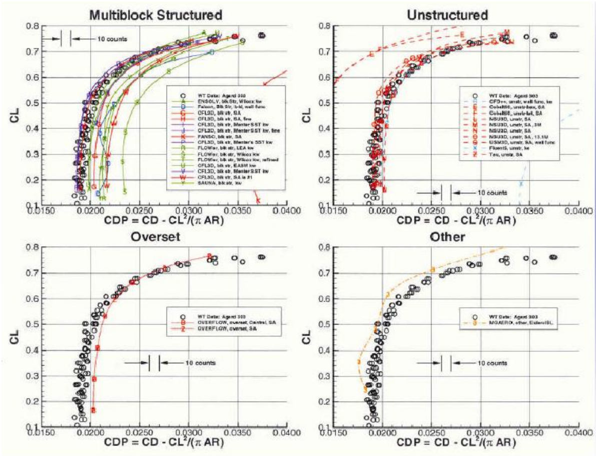
איור 2 מראה גרפים של מקדם המומנט C_M כנגד מקדם



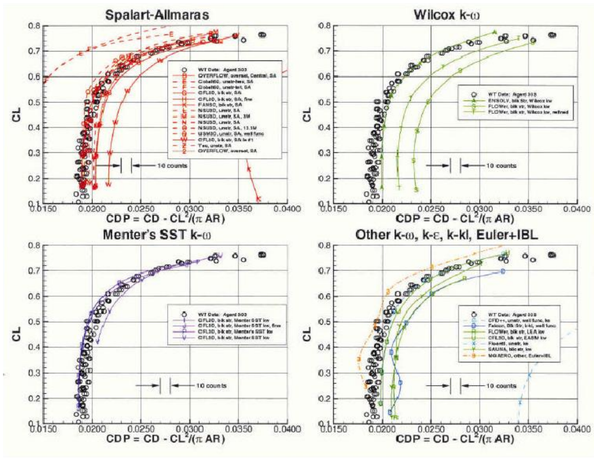
איור 2: השוואה של תוצאות C_M כנגד C_L שהתקבלו ממודלים נומריים שונים.

העילוי C_L שהתקבלו מהמודלים השונים שהורצו. כל עקום מתאים לתוצאה שהתקבלה מהרצה אחת, כלומר ממודל נומרי מסוים. הפזור המשמעותי של התוצאות מפתיע ומאכזב. אם מודלים שונים נותנים תוצאות כה שונות, יש בכך משום לערער את בטחוננו כמהנדסים באמינות התוצאות של כל מודל לחוד.

איור 3 מראה השוואה של תוצאות שהתקבלו מרשתות שונות כאשר שאר הפרמטרים נשמרו קבועים. באיור 4 ההשוואה היא של מודלי טורבולנציה שונים. ניתן להתרשם כי השונות בתוצאות נגרמת משני הגורמים גם יחד. השוואות נוספות מראות כי גם לסוג הפותרן יש השפעה חשובה על התוצאות הסופיות.



איור 3: השוואה בין תוצאות שהתקבלו מרשתות שונות (מחולקות לפי סוגי הרשתות).



איור 4: השוואה בין תוצאות שהתקבלו ממודלים שונים של טורבולנציה (מחולקות לפי סוגי המודלים).

מעניין לציין כי השוואות מעין אלו נעשו גם בעבר עם שונות דומה בין התוצאות. כלומר, ניתן להתרשם כי לא התחולל שיפור ניכר בשנים האחרונות ביכולת של קודים נומריים לחזות גדלים אוירודינמיים חשובים על סמך חישובי CFD. התוצאה הזו מפתיעה במיוחד בהתחשב בעובדה כי הניסוי הנוכחי נערך עם גיאומטריה פשוטה יחסית (קונפיגורצית כנף-גוף עם כנף קלאסית וגוף פשוט, ללא מנועים וללא זנב), תנאי זרימה סטנדרטיים (עבר-קולי נמוך, מספר ריינולדס 3 מליון), ומשתמשים שהם מומחים מדרגה ראשונה באפליקציות CFD.

הדו"חות שהופצו בעקבות חקירה זו ע"י המכונים השונים מעלים מספר מסקנות. אנשי NASA Langley שהריצו מודלים ב-3 תוכניות – CFL3D, Overflow ו- USM3D – העירו כי ההבדלים בין 2 התוכניות הראשונות הם קטנים ונובעים מתבניות שונות ששני הקודים משתמשים בהם עבור הפרשים במעלה-הזרם (upwinding). הם לא מצאו הבדלים משמעותיים בין תוצאות הרשתות הסדורות והבלתי סדורות. מרשימים במיוחד הביצועים של הקוד USM3D: עם 3 מליון נקודות רשת הקוד רץ בין 1.7 שעות ל-4.2 שעות (תלוי בתנאי הריצה) על מחשב Origin-2000 עם 48 מעבדים.

הקבוצות מבראונשוויג וגטינגן המשתייכות ל-DLR הגיעו למספר מסקנות כלליות. ראשית, ההבדלים בשימוש ברשתות שונות עשויים להיות משמעותיים. בניסויים שקבוצות אלו ערכו התקבלו הבדלים של עד 20% במקדם הגרר עם רשתות שונות. פרוש הדבר שיש להזהר מאד מלהתייחס לתוצאות שהתקבלו עם רשת ספציפית (בעלת 3 מליון נקודות רשת!) כ"מכוונסות". שנית, הקבוצות הסיקו כי הקוד TAU המבוסס על רשתות בלתי סדורות לא סיפק פתרונות מדויקים לבעיה שנבדקה. שלישית, חזוי מקדם הגרר קל יותר מאשר חיזוי מקדם העילוי והמומנט. למעשה, ברשתות בעלות איכות נמוכה התקבל חיזוי טוב למקדם הגרר, עקב אפקט של "קיזוז שגיאות", אך התאמה לא טובה לעילוי ולמומנט. המסקנה מכך היא שכל שלושת המקדמים חייבים להבדק כאשר מנסים להעריך את הטיב של פתרון חישובי שהתקבל בתוכנת CFD.

ד"ר אריאלי סיים את הרצאתו במספר הערות כלליות, חלקן פילוסופיות במהותן, לגבי פני ה- CFD בעתיד. אין ספק שהתחום אינו "סגור" ושעבודת מחקר רבה עוד דרושה על מנת להגיע למצב בו ניתן יהיה להתייחס לתוצאות קודים כאמינות ומדויקות עבור כל משטר זרימה נתון. יש צורך דחוף בבדיקות והשוואות נוספות ש"ישימו את האצבע" בצורה ברורה יותר על הקשיים שעליהם יש להתגבר.

עד כאן חלקים מהרצאתו של ד"ר אריאלי. ניתן להוסיף בהקשר זה את ההערות הבאות.

הסבר חלקי למצב המתואר לעיל של CFD אפשר למצוא באופי של בעיות הזרימה עצמן. מצב הידע התיאורטי עבור משוואות נביאר-סטוקס, המהוות את המודל המתימטי הבלתי מעורער לבעיות זרימה, הוא מוגבל ביותר. למשל, עד היום לא ידוע אם למשוואות נביאר-סטוקס קיים בכלל פתרון לכל צרוף של פרמטרים נתונים, ובמקרים בהם קיים פתרון – האם הוא יחיד או לא. בעיה זו של קיום ויחידות פתרונות למשוואות נביאר-סטוקס מעסיקה את המתימטיקאים זה זמן רב והיא נחשבת אתגר מתימטי ממדרגה ראשונה. לאחרונה האקדמיה האמריקאית למדעים כללה אתגר זה בין שבעה אתגרי-פסגה שהוכרז לגביהם פרס של 7 מליון דולר (מליון דולר לפתרון של כל אתגר). קוראי העלון מוזמנים לנסות את כוחם! (אגב, אתגר מתימטי אחר מתוך השבעה – הוכחת השערת פואנקרה – נפתר לאחרונה.) מעבר לחשיבות המתימטית של קיום ויחידות פתרון, יש לבעיה זו השלכות פרקטיות חשובות ביותר. נחשוב למשל על מצב מסוים שבו אין למשוואות נביאר-סטוקס פתרון יחיד. אם ננסה להפעיל קוד CFD במצב זה, כאשר אנחנו כמובן עוורים לחלוטין למתרחש, צפוי להתקבל פתרון חשובי בעל התנהגות "מוזרה". הקושי במקרה זה טמון במודל המתימטי עצמו שאינו מוצג-היטב (ill-posed), וברמה זו, ולא ברמה החישובית, יש לטפל בו. כאשר המודל המתימטי "חולה", אזי גם אם נפעיל את התותחים הנומריים הכבדים ביותר שלנו לא נוכל להגיע לתוצאה משביעת רצון.

משתמשים רבים אינם מודעים לחיוניות של מודל מתימטי "בריא" והם תולים את כל האשם בקשיי פתרון באספקטים הנומריים של התוכנה החישובית. (כמובן שמשתמשים אלו אינם נמנים על חברי אישח"מ...) זכורה לי הרצאה בנושא קיום ויחידות של פתרונות שניתנה בכנס מסוים של מהנדסים בשנות ה-90 בארה"ב. המרצה היה מתימטיקאי. לאחר ההרצאה, בהפסקת הקפה, שמעתי את אחד המהנדסים אומר לחברו: "מה אכפת לי אם הפתרון קיים או יחיד: אני רוצה למצוא אותו!"

נושא נוסף התורם לקשיים הבאים לידי ביטוי ב-CFD הוא הרגישות הגבוהה של הפתרון ל"נתונים" של הבעיה. רגישות כזו באה לידי ביטוי בצורה חזקה ביותר בבעיות של חזוי מזג האויר, למשל. כולנו יודעים עד כמה קשה לחזות את מזג האויר אפילו לעוד 3 ימים, ועד כמה שגיאות החיזוי עלולות להיות גדולות. הסיבה היא ששינוי קטנטן במשטר זרימת האויר ו/או בפילוג הטמפרטורות כרגע עלול להוביל לשינוי עצום במשטר הזרימה בעוד 3 ימים. הדבר מכונה לעיתים "אפקט הפרפר", מושג המתקשר לתחום הנקרא כאוס – chaos. ראו הרחבה על כך בהמשך הגליון. באוירודינמיקה באופן טיפוסי הרגישות מסוג זה קטנה בהרבה, ולמרות זו היא קיימת ועלולה לגרום, למשל, לכך שרשתות שונות יתנו תוצאות שונות גם אם מבחינה נומרית נדמה לנו שאנו בתחום ה"מכונס".

נושא הקרוב באופיו לנושאים הנ"ל הוא מודל הטורבולנציה בו משתמשים. האופן בו יש למדל טורבולנציה בצורה נכונה גם הוא נחשב אחד האתגרים הגדולים והחשובים של ימינו. אין כיום מודל שיש לגביו קונצנזוס ואשר מתפקד באופן משביע רצון בכל המצבים. הבחירה במודל הטורבולנציה היא הרבה יותר מאשר פרט חישובי בתוכנת CFD – ניתן להסתכל עליה כעל חלק מהגדרת המודל המתימטי הבסיסי. לפיכך, לפני שיושגו ביצועים טובים של תוכנות CFD עבור זרימה טורבולנטית יתכן כי יש להשיג התקדמות בתחום התיאורטי של מודלי טורבולנציה.

בהקשר זה יש להעיר לגבי הניסויים שנעשו בסדנת AIAA עם רשתות שונות ומודלי טורבולנציה שונים (ראה איורים 3 ו-4). על פי האמור לעיל, יש כאן מעין ערבוב של שני גורמים שלא צריכים להבדק על אותה רמה: הרשת היא ישות חישובית לחלוטין המהווה חלק משיטת הפתרון, בעוד שהמודל הטורבולנטי קשור יותר לתיאוריה המתימטית שבבסיס הבעיה אותה רוצים לפתור. נזכיר כי בכנס של האגודה האמריקאית למכניקה חישובית שנערך לאחרונה (NCCM7) דיבר T. Oden על ההבדל בין וריפיקציה (verification), שהיא בדיקת ואישור השיטה הנומרית, לבין ואלידציה (validation), שהיא בדיקת ואישור המודל המתימטי. למרות שניתן להתווכח על המינוח הזה המעט שרירותי, ההבחנה בין שתי הרמות הללו חשובה ביותר. את המודל המתימטי יש לבדוק מול "המציאות" (ניסויי מנהרה במקרה שלנו) או מול מודלים מתימטיים מתקדמים או רחבים יותר. את המודל הנומרי יש לבדוק מול פתרונות הנחשבים אמינים ומדויקים. נכון כי היישום של כללים אלו קשה מאד כאשר מדובר בבעיות מתקדמות ב-CFD, אולם נוצר בכל זאת הרושם כי חוקרי סדנת AIAA לא הקדישו תשומת-לב מספיקה להפרדה העקרונית בין שתי הרמות.

בכל אופן, נראה כי מכניקת הזורמים השימושית בכלל ו-CFD בפרט עומדות בפני מספר אתגרים עצומים, לא כולם בתחום החישובי הטהור, שעוד ארוכה הדרך לפתרונם. כמו כן, נראה כי חיוני שמתימטיקאים, פיסיקאים ומהנדסים, בתחום התיאורטי, החישובי והניסויי יעשו יד אחת בפריצת הדרך הדרושה כאן.

אפקט הפרפר

המידע הבא נלקח מהרצאה סמינריונית שנתן האסטרופיסיקאי Larry Bradley מאוניברסיטת Johns Hopkins לאחרונה בנושא כאוס ופרקטלים. למידע נוסף ראו האתר www.pha.jhu.edu/~ldb/seminar/.

חיזוי מזג אויר הוא בעיה קשה ביותר. מטאורולוגים יודעים לנבא את מזג האויר לתקופות קצרות, יומיים לכל היותר, אך מעבר לזה התחזיות הן בד"כ לא מדויקות.

אדוארד לורנץ (Lorenz) היה מתימטיקאי ומטאורולוג באוניברסיטה הידועה MIT אשר התעניין במחקר במזג האויר. עם התפתחות המחשב, לורנץ הבחין בהזדמנות לשלב מתימטיקה ומטאורולוגיה. הוא פנה לבנות מודל מתימטי של מזג האויר, כלומר מערכת של משוואות דיפרנציאליות שייצגו שינויים בטמפרטורה, לחץ, מהירות הרוח וכו'. לבסוף הצליח לורנץ להגיע למודל גס של מזג האויר הכולל מערכת של 12 משוואות דיפרנציאליות. הוא קרב את המשוואות בעזרת הפרשים סופיים וכתב תוכנית מחשב הפותרת אותן.

יום אחד בחורף 1961, לורנץ רצה לבחון מחדש רצף של תוצאות שהתקבלו מהמודל שלו. במקום להתחיל את כל הריצה מתחילתה (כלומר מזמן $t=0$), הוא החליט לחסוך בחישובים ולהתחיל את הריצה מאיזשהו זמן באמצע. הוא השתמש בתדפיס של תוצאות שהיה ברשותו, הכתיב כתנאי התחלה את התוצאות שדווחו בערך באמצע הריצה הקודמת, ונתן לתוכנית לרוץ. מה שהוא קיבל היה מאד לא צפוי. הוא ציפה שתוצאות ההרצה השניה יתאימו לחלוטין לתוצאות ההרצה הראשונה. התוצאות אמנם התאימו בתחילה, אולם החלו להיות שונים לגמרי לאחר זמן מה. הריצה השניה איבדה כל דמיון לראשונה תוך מספר "ימי מודל". איור 5 מראה דגימה משתי הריצות שלו.

איור 5: תוצאות שתי הריצות של לורנץ.

בתחילה לורנץ חשב שמשהו השתבש במחשב שלו, שהיה מחשב מסוג Royal McBee, מכונה איטית להחריד במונחים של היום ונתונה לתקלות. לאחר בדיקה מקיפה, לורנץ מצא את המקור לבעיה. התדפיסים שלו הראו את התוצאות עם שלוש ספרות משמעיות בעוד שהנתונים בזכרון המחשב הכילו 6 ספרות. בכך שלורנץ הכניס את הנתונים לתוכנית מהתדפיס הוא "עיגל" אותם, והניח שהעגול הזה הוא בלתי משמעותי. זו הנחה שעל פני השטח נראית הגיונית – האם שמעתם פעם באמצעי התקשורת דיווח על טמפרטורות עם מספר של ספרות לאחר הנקודה העשרונית?

הדבר הוביל את לורנץ להבנה שחיזוי מזג אויר לטווח ארוך נדון לכשלון. המודל הפשוט שלו כרוך בתופעה הידועה כרגישות בתלות בתנאי התחלה, וידועה גם בשם "אפקט הפרפר": משק הכנפיים של פרפר בג'ונגל בדרום אמריקה עלול לגרום לסופת הוריקן עצומה ביפן לאחר

שבועיים. השאלה העולה היא – מדוע מערכת של משוואות לגמרי דטרמיניסטיות מתנהגת בצורה כזו? הרי במקרים רבים המוכרים לנו פרטורבציות התחלתיות קטנות מובילות לשינויים קטנים בהתנהגות. מסתבר שזהו לא המקרה במודל של לורנץ לחיזוי מזג האויר. ההסבר טמון באופי המשוואות, וליתר דיוק באופי האי-לינאריות שבהן. המשוואות הן בעלות אופי כאוטי, וההתנהגות הבלתי-צפויה של פתרונותיהן היא התנהגות אינהרנטית של מערכת כזו. למרות ההגדרה הדטרמיניסטית של המשוואות, הן מובילות לתוצאות שיש להן במובן מסוים אופי יותר "סטטיסטי" מאשר דטרמיניסטי.

שיטות רב-סריג (Multigrid)

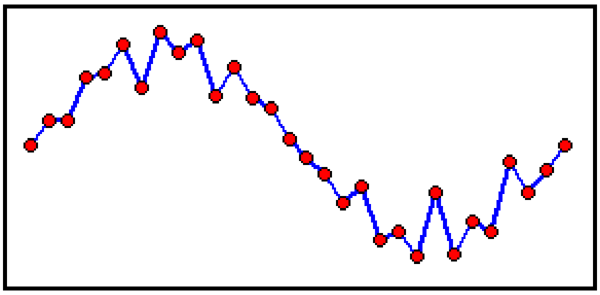
שיטות רב-סריג (multigrid) הן שיטות נומריות רבות עוצמה השייכות למשפחת שיטות מרובות-סקאלות (multi-scale). שיטות אלו הוצגו לראווה פעמיים במשך ימי-העיון של אישח"מ: פעם בצורת לומדה, שניתנה ע"י עירד יבנה מהטכניון ביום העיון ה-6, ופעם ביום העיון ה-11 בהרצאתו של אכי ברנדט ממכון וייצמן, ממציא השיטה. בגליון זה נציג את עקרי השיטה. מידע נוסף למתעניינים בנושא ניתן להשיג בספרון המצויין "A Multigrid Tutorial" מאת W.L. Briggs מ- 1987. הספר יצא לאחרונה במהדורה שנייה מורחבת והצטרפו אליו שני מחברים נוספים, אולם ללימוד ראשון של הנושא המהדורה המקורית היא מעולה. ראו גם את אתר האינטרנט www.cfdreview.com של העלון הוירטואלי של CFD Revirew.

ישנן דרכים שונות להציג את שיטת רב-סריג. דרך אחת מקובלת היא להסתכל על רב-סריג כמאיץ של פותרן איטרטיבי. לפיכך נפתח בהערות כלליות לגבי פותרנים איטרטיביים. נסתכל על מערכת המשוואות האלגבריות הלינארית

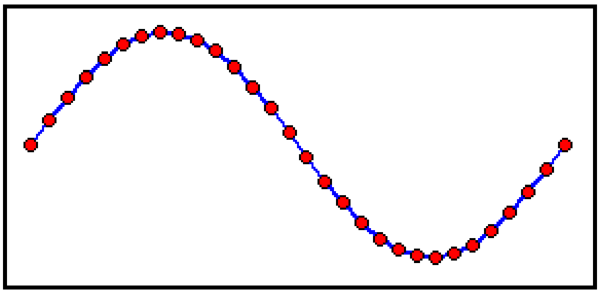
$$Kd=F \qquad (1)$$

שהתקבלה מדיסקרטיזציה של בעיה כלשהי במכניקה בשיטה נומרית כלשהי, למשל בשיטת האלמנטים הסופיים עם רשת נתונה. "גודל הבעיה" הוא מימד המטריצה K (שווה למימד של הוקטורים d ו-F), ושווה גם למספר דרגות החופש בדיסקרטיזציה: נסמן אותו ב-N. באופן טיפוסי N הוא מספר גדול מאד (בבעיות CFD שנדונו לעיל N היה בסדר גודל של מליונים). ישנם שני סוגי שיטות לפתרון המערכת (1): שיטה ישירה ושיטה איטרטיבית. בשיטה ישירה, כגון אלימינציה של גאוס, המערכת נפתרת במדויק (עד כדי דיוק המחשב) במספר סופי של צעדים. מספר הצעדים הוא בסדר גודל של N^3 אם המטריצה K מאוכלסת בצפיפות וקטן יותר אם היא דלילה (מה שבד"כ קורה בשיטת האלמנטים הסופיים). בכל מקרה, כאשר N מספר גדול מאד, למשל יותר מ-100,000, אזי פתרון בשיטה ישירה נעשה יקר מידי מבחינה חישובית ובלתי מעשי. לעומת זאת, שיטה איטרטיבית לפתרון המערכת (1), הנקראת לפעמים גם שיטת רלקסציה, היא שיטה המתחילה מאיזשהו ניחוש התחלתי עבור הפתרון d ומתקרבת לפתרון המדויק בהדרגה. היתרון בשיטה כזו הוא שניתן לעצור את התהליך האיטרטיבי מתי שרוצים. כלומר, בניגוד לשיטה ישירה שהיא שיטה של "הכל או לא כלום", בשיטה איטרטיבית אנו "מקבלים תמורה על פי התשלום": דיוק הפתרון יקבע על פי מספר האיטרציות שנבצע. עבור בעיות גדולות מאד (N גבוה) יש להשתמש בפותרן איטרטיבי.

ישנן שיטות איטרטיביות רבות בנמצא, עם רמות שונות של מסובכות. שיטה פשוטה המהווה פעמים רבות בסיס לפותרן רב-סריג היא שיטת גאוס-זיידל (Gauss-Seidel). כאשר משתמשים בשיטת גאוס-זיידל (או בשיטת רלקסציה אחרת) לפתרון מערכת הלינארית שפתרונה המדויק ידוע ומחשבים את השגיאה בכל איטרציה מבחינים בתופעה המעניינת הבאה: במהלך האיטרציות הראשונות השגיאה יורדת בצורה מהירה מאד, ולאחר מכן הירידה מתמתנת ונהפכת לאיטית בהרבה. לעיתים (תלוי במידת ה"חולניות" של המטריצה K) יש צורך באיטרציות רבות מאד על מנת להגיע לרמת הדיוק הדרושה של הפתרון. כאשר בוחנים את התנהגות השגיאה יותר לעומק מגיעים להסבר הבא. הירידה ההתחלתית התלולה בשגיאה מתאימה לחיסול המהיר של "רכיבי" השגיאה בעלי תדירות גבוהה, כלומר המודים האוסילטוריים של השגיאה. הירידה האיטית נגרמת מהנוכחות של מודים בעלי תדירות נמוכה, כלומר הרכיבים ה"חלקים". ראה איורים 6 ו-7. המסקנה החשובה היא ששיטת רלקסציה סטנדרטית מתכנסת מהר מאד כל עוד לשגיאה יש רכיבים בעלי תדר גבוה, אולם החיסול של רכיבים בעלי תדר נמוך בשגיאה הוא איטי בהרבה.

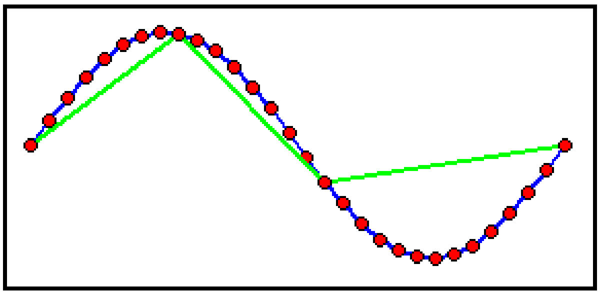


איור 6: שגיאה התחלתית, לפני הפעלת איטרציות גאוס-זיידל. השגיאה מכילה רכיב בעל תדר נמוך ורכיבים בעלי תדר גבוה ה"מולבשים" עליו.



איור 7: השגיאה שמתקבלת לאחר מספר איטרציות גאוס-זיידל. הרכיבים בעלי התדר הגבוה נעלמו, אך הרכיב בעל התדר הנמוך (הרכיב החלק) נשאר, והוא דועך לאט מאד עם התקדמות התהליך האיטרטיבי.

נשאלת השאלה האם ניתן לשנות בצורה כלשהי את התהליך האיטרטיבי כך שגם הרכיבים החלקים של השגיאה יחוסלו במהירות. כאן באה אבחנת המפתח שעליה מבוססת שיטת רב-סריג: רכיבים חלקים על רשת עדינה נראים פחות חלקים על רשת גסה. מכיוון ששיטת רב-סריג פותחה במקור עבור דיסקרטיזציות של הפרשים סופיים, מקובל השימוש במונח "סריג" במקום "רשת", אולם העקרון זהה בשני המקרים, ומודגם באיור 8. נסתכל על סריג חד-מימדי בעל 30 צמתים, ונניח שיש דרגת חופש אחת בכל צומת, כלומר שהבעיה היא בגודל N=30. נצייר גרף של השגיאה שהתקבלה לאחר מספר איטרציות גאוס-זיידל על גבי סריג זה. עתה נסתכל על סריג גס בעל 4 נקודות צומת בלבד, ו"נעביר" את השגיאה מהסריג העדין לסריג הגס. על גבי הסריג הגס השגיאה כלל לא נראית חלקה!



איור 8: השגיאה החלקה על הסריג העדין (כחול) הופכת לשגיאה אוסילטיבית (ירוק) על הסריג הגס.

האבחנה הנ"ל מרמזת לנו שכאשר הרלקסציה מתחילה לדרוך במקום, דבר המראה על דומיננטיות של רכיבי שגיאה חלקים, כדאי לנו לעבור לסריג גס יותר, שעליו רכיבי שגיאה אלו יופיעו כאוסילטוריים יותר והרלקסציה תהפוך ליותר יעילה. על העקרון הזה מבוססת שיטת רב-סריג.

שאלה שיש לענות עליה עתה היא כדלקמן. בדיון לעיל דיברנו על התנהגות השגיאה במשך התהליך האיטרטיבי. אולם כיצד ביכולתנו לשלוט בשגיאה? הרי אנו מבצעים איטרציות על המשוואה (1) שבה מופיע הפתרון d ולא השגיאה! על מנת לענות על שאלה זו נגדיר את וקטור השגיאה באיטרציה ה-n-ית:

$$e_n = d - d_n \qquad (2)$$

כאן d_n הוא הפתרון המתקבל לאחר n איטרציות גאוס-זיידל ולכן ההפרש בין הפתרון המדויק d לבינו נותן את השגיאה באיטרציה n. נשים לב שאם השגיאה היתה ידועה לנו, היינו יכולים ממנה ומידיעת d_n לקבל את הפתרון המדויק מתוך (2). בפועל השגיאה כמובן אינה ידועה לנו. עדיין, אם תהיה לנו שגיאה מוערכת נוכל לקבל הערכה לפתרון המדויק מתוך

$$d = d_n + e_n \qquad (3)$$

כמו כן, נגדיר את וקטור השארית (residual) באיטרציה n:

$$r_n = F - Kd_n \qquad (4)$$

השארית מודדת עד כמה המערכת (1) מתקיימת במדויק לאחר n איטרציות. נשים לב שבעוד שהשגיאה e_n אינה ידועה, השארית r_n ניתנת לחישוב פשוט ע"י משוואה (4). עתה, נכפיל את (2) במטריצה K מצד שמאל ונשתמש ב-(1), כדי לקבל

$$Ke_n = F - Kd_n \qquad (5)$$

ע"י השוואת (4) ו-(5) (שהן בעלות אגף ימני זהה) נסיק:

$$Ke_n = r_n \qquad (6)$$

או אם נשמיט את האינדקס n ליתר בהירות:

$$Ke = r \qquad (7)$$

זוהי משוואת השגיאה, הקושרת בין השגיאה לשארית. נוכל להשתמש במערכת (7) במקום במערכת המקורית (1) על מנת לשלוט בצורה ישירה בשגיאה.

כפי שראינו, אחת הפעולות הבסיסיות הנחוצות בשיטת רב-סריג היא מעבר של ערכי פונקציה (או וקטור) מסריג עדין לסריג גס. כפי שנראה בהמשך, גם הפעולה ההפוכה נחוצה, כלומר מעבר של ערכי פונקציה (או וקטור) מסריג גס לסריג עדין. פעולת המעבר מסריג עדין לגס נקראת הגבלה (restriction). ההגבלה הפשוטה ביותר מתקבלת ע"י כך שהסריג הגס נבחר להתלכד עם צמתים מסוימים של הסריג העדין, כפי שהדבר נעשה באיור 8. במקרה זה ניתן לעבור מהסריג העדין לגס ע"י כך שמתעלמים מכל הערכים חוץ מהערכים בצמתים המשותפים לשני הסריגים. פעולת המעבר מסריג גס לעדין נקראת אינטרפולציה או הרחבה (prolongation). ההרחבה הפשוטה ביותר היא אינטרפולציה לינארית של ערכי הסריג הגס על מנת לקבל את ערכי הביניים של הסריג העדין.

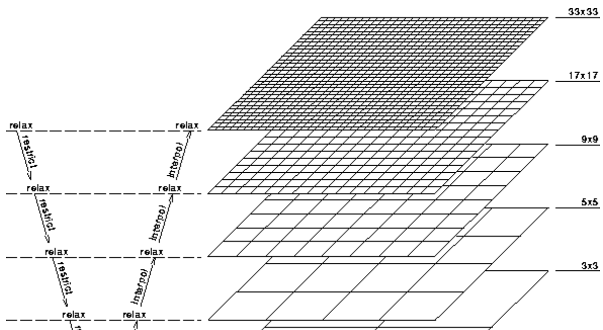
עתה נוכל להציג את ה"גרעין" של שיטת רב-סריג, הנקרא "תיקון בעזרת הסריג הגס" (Coarse Grid Correction). אלגוריתם זה מוגדר בצורה הבאה:

<u>**תיקון בעזרת הסריג הגס**</u>:

1. בוחרים ניחוש התחלתי לפתרון d על הסריג העדין.
2. מבצעים מספר איטרציות גאוס-זיידל של המערכת (1) על הסריג העדין.
3. מחשבים את וקטור השארית על הסריג העדין ומעבירים אותו לסריג הגס בעזרת "הגבלה".
4. פותרים את (7) על הסריג הגס למציאת השגיאה.
5. מעבירים את השגיאה מהסריג הגס לעדין בעזרת "הרחבה".
6. משתמשים ב-(3) על מנת לתקן את הפתרון על הסריג העדין.
7. ממצב זה, מבצעים לסיום עוד מספר איטרציות גאוס-זיידל של המערכת (1) על הסריג העדין.

נעיר כי את הפתרון בשלב 4 באלגוריתם מבצעים בעזרת פותרן ישיר: בהנחה שהסריג הגס הוא בעל מספר קטן מספיק של צמתים, הפותרן הישיר זול ומדויק.

העקרון של שיטת רב-סריג הוא להשתמש באלגוריתם הנ"ל בצורה רקורסיבית, עם מספר של סריגים בעלי רמות שונות של עדינות. הסכימה הבסיסית נקראת V-cycle, מכיוון שהמעבר בין הסריגים השונים יכול להיות מתואר בצורת האות V, כפי שהדבר מודגם באיור 9. באיור מתוארות חמש רשתות המסודרות ב"שכבות": בשכבה העליונה הרשת העדינה ביותר ובשכבה התחתונה – הגסה ביותר.



איור 9: דיאגרמה של שיטת רב-סריג בגירסת V-cycle.

הרעיון הוא לבצע "הגבלה" וחישוב שגיאה מרשת לרשת בכוון הגס (החלק היורד של ה-V) ולאחר שמגיעים לרשת הגסה ביותר לבצע "הרחבה" ותיקון הפתרון מרשת לרשת בכוון העדין (החלק העולה של ה-V). מספר הרמות בהן משתמשים הוא כזה שיבטיח פתרון ישיר מהיר מאד של המשוואות על הסריג הגס ביותר.

ישנן גירסאות אחרות של שיטת רב-סריג, כגון W-cycle או סכימת FMV, אולם כולן מבוססות על העקרון הנ"ל.

נשאלת כמובן השאלה עד כמה שיטת רב-סריג היא יעילה. במילים אחרות: כמה פעולות נדרשות על מנת לפתור את המערכת הלינארית הנתונה (1) בשיטת רב-סריג עד להתכנסות? יש כמובן להגדיר למה אנו מתכוונים ב"עד להתכנסות": הכוונה לכך שהשגיאה בפתרון של (1) עקב התהליך האיטרטיבי תהיה באותו סדר גודל כמו שגיאת הדיסקרטיזציה בסריג העדין (שקיימת בכל מקרה). אנליזה מתימטית לא סבוכה במיוחד מובילה למסקנה שמספר הפעולות הוא בסדר גודל של N. זוהי תוצאה נפלאה! כדי להבין מדוע היא כה נפלאה, נבחין תחילה כי N הוא המספר האופטימלי של פעולות: לא יתכן למצוא פותרן שיפתור את המערכת (1) בפחות מ-N פעולות מכיוון ש-N פעולות דרושות רק על מנת לרשום את הפתרון. שנית, הבה נשווה את מספר הפעולות הזה למספר הפעולות הנדרש בשיטות אחרות. ראו הטבלה שלהלן:

שיטה	2D	3D
אלימינצית גאוס מלאה	N^3	N^3
Band Cholesky	N^2	$N^{2.33}$
Nested Dissection	$N^{1.5}$	N^2
Conjugate Gradients	$N^{1.5}$	$N^{1.33}$
Preconditioned Conjugate Gradients	$N^{1.25}$	$N^{1.17}$
רב-סריג	N	N

בטבלה מצוינות מספר הפעולות הדרושות לפתרון המערכת (1) המתקבלת בשיטת האלמנטים הסופיים (עם N דרגות חופש) בשיטות שונות בשני מימדים (2D) ובשלושה מימדים (3D). ההבדל בין 2D ו-3D נובע מההבדלים בדלילות המטריצה K בשני המקרים. שלוש השיטות הראשונות הן שיטות ישירות ושלוש האחרות הן איטרטיביות. כדי להתרשם מחשיבות מספר הפעולות, נניח שהבעיה הנתונה היא בעלת גודל מליון, כלומר כוללת מליון דרגות חופש ולפיכך K היא מטריצה של מליון x מליון. כדי לפתור את המערכת (1) בעזרת אלימינצית גאוס מלאה יש לפיכך צורך ב-10 בחזקת 18 פעולות (ראו שורה ראשונה בטבלה). שום מחשב ולו החזק והמקבילי ביותר אינו מסוגל כיום לבצע מספר כזה של פעולות בזמן סביר. לפיכך, כפי שהטבלה מראה (וניתן להתייחס אליה כמתארת את ההתפתחות ההסטורית), הוצעו שיטות יעילות יותר לביצוע המשימה. שיטת רב-סריג יכולה להחשב כשיטה האופטימלית במובן זה שהיא מבצעת את המשימה במספר המועט ביותר האפשרי של פעולות. המצאת השיטה בשנת 1977 ע"י אכי ברנדט נחשבת כאחת מהתגליות המשמעותיות ביותר בחישוב מדעי במאה ה-20.

אם הכל כך נפלא, מדוע השימוש בשיטת רב-סריג לא הפכה (עדיין) למשהו מובן מאליו שמשתמשים בו תמיד לפתרון כל בעיה תעשייתית גדולה? התשובה היא כפולה. ראשית, לכל רעיון חדש ומהפכני לוקח זמן רב לחדור לתעשייה, ואכן שיטות רב-סריג תופסות בהדרגה יותר ויותר מקום באפליקציות. שנית, השיטה כפי שתוארה לעיל דורשת בנייה של סדרה של רשתות, מהעדינה ביותר ועד לגסה ביותר. תהליך בניית הרשתות גוזל זמן חישוב (שלא נלקח בחשבון בהערכה של N פעולות!) ועלול להיות מסובך ברשתות בלתי סדורות. גירסה זו של השיטה נקראת רב-סריג גיאומטרי מכיוון שהיא נסמכת על הגיאומטריה של הרשתות השונות. במילים אחרות, בניגוד לפותרנים אחרים שיטת רב-סריג גיאומטרי אינה יכולה לפתור את המערכת (1) תוך ידיעת K ו-F בלבד: היא זקוקה למידע (גיאומטרי) נוסף. בשנים האחרונות התפתחה גירסה אחרת של השיטה שנקראת רב-סריג אלגברי (Algebraic Multigrid) הדורשת ידיעת K ו-F בלבד ואינה נזקקת לבניית רשתות או למידע גיאומטרי אחר. קשה עדיין לקבוע אם השיטה האלגברית תכבוש מקום מרכזי במכניקה חישובית מכיוון שהיא עדיין בשלבי פיתוח. כמו כן, יש הטוענים כי גירסה זו של השיטה מסורבלת מידי ומבוססת על מספר של הנחות הפוגמות באלגנטיות של הגירסה הגיאומטרית המקורית.

לסיום, נציג את שיטת רב-סריג מזוית מעט אחרת. נסתכל שוב על המערכת הלינארית (1) ועל פותרן איטרטיבי סטנדרטי המופעל עליה. ידוע כי מספר האיטרציות הדרוש להתכנסות של הפתרון קשור חזק בתכונה של המטריצה K הנקראת Condition Number (CN). עבור מטריצות סימטריות וחיוביות (כפי שטיפוסי לקבל בשיטת האלמנטים הסופיים) ההגדרה של ה-CN פשוטה מאד: זהו היחס בין הערך העצמי הגדול ביותר לערך העצמי הקטן ביותר של המטריצה K. ככל ש-CN קרוב יותר ל-1 המטריצה נחשבת "בריאה" יותר (well-conditioned). מטריצת היחידה היא מטריצה אידאלית מכיוון שה-CN שלה הוא 1. כאשר CN גבוה המטריצה נחשבת "חולנית" (ill-conditioned). ראוי להעיר שה-CN של המטריצה K המתקבלת מדיסקרטיזציה עם רשת עדינה גבוהה יותר מזה המתקבל מרשת גסה. כלומר יש כאן "מלחמה נומרית" בין שני גורמים: ככל שהרשת יותר עדינה שגיאת הדיסקרטיזציה (למשל, שגיאת האלמנטים הסופיים) קטנה יותר, אך מצד שני המטריצה K נעשית חולנית יותר. כאמור, מטריצה חולנית תגרום לשיטה איטרטיבית להתכנס לאט מאד.

דרך טובה להתגבר על בעיית החולניות של מטריצה היא "להבריא" אותה ע"י מכפלת המערכת (1) משמאל במטריצה מיוחדת P:

$$PKd=PF \qquad (8)$$

אם המטריצה PK היא בריאה, הרי שניתן לפתור את המערכת (8) במספר קטן של איטרציות. התהליך הזה נקרא preconditioning (בעברית ניתן להציע פשוט "הבראה") והמטריצה P נקראת preconditioner. אם למשל ניקח $P=K^{-1}$ נקבל ריפוי מושלם כי המטריצה תהפוך למטריצת היחידה, אך הדבר כמובן בלתי אפשרי, מכיוון שהמטריצה K^{-1} אינה ידועה לנו (אם היא היתה ידועה, הפתרון של מערכת (1) היה טריויאלי!). רעיון פשוט מאד לבחירת P שנותן הבראה לא רעה הוא $P=(\text{diag } K)^{-1}$ באשר diag K היא מטריצה אלכסונית שאיברי אלכסונה זהים לאיברי האלכסון של K.

ניתן להראות ששיטת רב-סריג היא למעשה שיטת הבראה למערכת (1). כלומר קיימת מטריצה P (שניתן לחשבה) כך שהפעלתה במערכת (8) אקוויולנטית לפעולות המופעלות בשיטת רב-סריג. במילים אחרות, שיטת רב-סריג יכולה להחשב כ-preconditioner. יתר על כן, זהו preconditioner אופטימלי במובן שהוא מוביל למערכת (8) שניתן לפתרה במספר פעולות פרופורציוני ל-N.

מחקר בשיטות רב-סריג, ובאופן יותר רחב בשיטות מרובות סקאלות, עדיין פעיל מאד כיום, בעיקר באופן שילובן ויישומן בבעיות לא-לינאריות מורכבות שונות.

כנס האגודה האמריקאית למכניקה חישובית

ביולי 2003, במשך שלושה ימים, התקיים הכנס ה-7 של האגודה האמריקאית למכניקה חישובית באלבוקרק, ניו-מקסיקו. על פי המסורת של סידרת הכנסים הזו, הכנס היה

המוני ודחוס ביותר. בכל רגע נתון התקיימו 27 (!) מושבים של הרצאות במקביל, מלבד ההרצאות המוזמנות. בסכה״כ הכנס כלל 238 מושבי הרצאות.

איור 10: סמל הכנס ה-7 של האגודה האמריקאית למכניקה חישובית

ניתן להתרשם מתוך כותרי המושבים מה הם הנושאים ״החמים״ כיום במכניקה חישובית. רבים מן המושבים הוו ״שרשראות״ הקשורות לנושא אחד. סיכום ״מצעד הפופולריות״ של הנושאים השונים הוא כדלקמן:

1. שיטות חסרות רשת: 13 מושבים
2. יצירת רשתות: 13 מושבים
3. מודלים מרובי סקאלות: 13 מושבים
4. חישובי ביו-הנדסה: 12 מושבים
5. חישובי גיאומכניקה: 9 מושבים
6. שיטות אופטימיזציה: 9 מושבים
7. חישובי מיקרו וננו: 8 מושבים
8. CFD כללי: 8 מושבים
9. מכניקת שבר חישובית: 8 מושבים
10. הסעה וריאקציה: 7 מושבים
11. מבנים – סטטיקה ודינמיקה: 7 מושבים
12. פלסטיות: 7 מושבים
13. מודלים קוהסיביים: 6 מושבים
14. בעיות עם שפות נעות: 6 מושבים
15. שיטות גלרקין בלתי-רציף (DG): 6 מושבים
16. בעיות הופכיות: 6 מושבים
17. בעיות נגיפה (impact): 6 מושבים
18. זורמים מיוחדים: 5 מושבים
19. אתגרים של הסוכנויות הממנות: 5 מושבים
20. אלמנטים סופיים חדשניים: 5 מושבים
21. אלמנטים סופיים מסוג p ו-hp: 5 מושבים
22. בעיות של אי-ודאות: 5 מושבים
23. הערכת שגיאה: 4 מושבים
24. חישובים לבעיות מגע: 4 מושבים
25. אלמנטים סופיים מיוצבים: 4 מושבים
26. התאמה בין סריגים: 4 מושבים
27. אינטראקצית זורם-מבנה: 4 מושבים
28. זרימה בצינורות: 4 מושבים
29. שיטות לבעיות גלים: 4 מושבים
30. בעיות הנדסיות מצומדות: 4 מושבים
31. תשתית (קודים) למכניקה חישובית: 4 מושבים
32. זרימת משטח חופשי: 3 מושבים
33. חומרים (מוצקים) מיוחדים: 3 מושבים
34. חישובי טורבולנציה: 3 מושבים
35. מכניקת נזק חישובית: 3 מושבים
36. אמינות של חישובים: 2 מושבים
37. שיטות שפה פיקטיבית: 2 מושבים
38. שיטות Diff. Quadrature: 2 מושבים
39. מבנים דקי דופן: 2 מושבים
40. חישובים בסקאלת טרה: 1 מושב

נעיר מספר הערות לגבי רשימה מעניינת זו:

א. משעשע לראות בשני המקומות הראשונים שיטות חסרות-רשת מצד אחד ויצירת רשתות מצד שני! פרוש הדבר ששתי הגישות – זו המשתמשת ברשת וזו הנמנעת ממנה – חיות ופעילות.

ב. מספר נושאים המופיעים ברשימה נסקרו בעלוני אישה״מ. למשל, על שיטות חסרות רשת ועל אלמנטים מסוג p ו-hp ראו עלון מס׳ 8. חלק מהנושאים יסקרו בעלון בעתיד.

ג. מובן שהחלוקה לנושאים ברשימה מלאכותית במידת מה. למשל, ״מבנים דקי דופן״ ניתן לכלול ב״מבנים – סטטיקה ודינמיקה״ או לחילופין ניתן לפצל את הנושא האחרון ל״סטטיקה״ ו״דינמיקה״. לפיכך צריך להתייחס בזהירות למיקום היחסי של הנושאים ברשימה.

ד. ״מודלים קוהסיביים״ (מס׳ 13 ברשימה) הם מודלים הקשורים לסדקים עם תיאוריות וכלים הלקוחים מתורת הפלסטיות. לפיכך הם משלבים בין מכניקת השבר (מס׳ 9) לפלסטיות (מס׳ 12).

ה. הנושאים הנחשבים חדשים יחסית, אשר לא הופיעו במידה כזו בכנסים קודמים, הם 1, 3, 4, 7, 13, 15, 37, 38 ו-40.

פינת הלשון

באנגלית יש הבחנה בין ״exact solution״ לבין ״accurate solution״. הביטוי הראשון מתכוון לפתרון המקיים ללא כל שגיאה את המשוואות הנתונות, ואילו הביטוי השני מתכוון לפתרון מקורב אך בעל דיוק גבוה, כלומר פתרון הכולל שגיאה קטנה. בעברית התרגום של ״exact״ וגם של ״accurate״ הוא ״מדויק״. דבר זה עלול לעיתים לגרום לבלבול. במקרים רבים ניתן להבין למה הכוונה לפי ההקשר. הצעה אפשרית היא להשתמש בביטוי ״פתרון אמיתי״ עבור ״exact solution״.

חידת רב-סריג נושאת פרס

נתון טקסט הקשור למכניקה חישובית, בו מסתתרים שני טקסטים נוספים. מצאו את שני הטקסטים הנוספים ושילחו למערכת. בין הפותרים נכונה יוגרל פרס של חברות חינם באישה״מ למשך שנה. חברי הועד של אישה״מ מוזמנים לשלוח פתרון אך לא ישתתפו בהגרלה. הפתרון, שמות הפותרים ושם הזוכה בפרס יפורסמו בגליון הבא.

קל לחשב עם הFE: אלמנט, צומת, פונק׳ ודרגת חפש. באגים עמידים. פתרונה הוא שגוי פרט לערכי הלחץ שמעל לחץ החללית. מערכת של משוואות הכור. מערכת דם: זרימה א-ניוטונית. תופעה. פרוס עבור ראשי. אנרגית גוף מוצק קשורה לרגשות לעבורים. עלוי, לחץ, מהיר׳, צפיפות, טמפרטורות ותנע. ניוטון. בודק את ממוצע הפתרון. ראה שהוא יציב תמיד. נסוח לאגרנז׳ ואוילר. רצף חומרי. חמום מיכל עבה. רשת עדינה.