עלון

אישח"מ

עלון האיגוד הישראלי לשיטות חישוביות במכניקה

ספטמבר 2005 מספר 14

הערות העורך:

נא שלחו לכתובת המערכת (בדואר אלקטרוני או רגיל) חומר לפרסום בעלון. ניתן ורצוי לצרף ציורים ותמונות. לידיעת חברות: ניתן גם לפרסם חומר מסחרי- פרסומי בתשלום. לפרטים נא לפנות למערכת. גירסה צבעונית של עלון זה מופיעה באתר האגוד (ראה לעיל).

חידוש רישום באגוד:

אנא הרשמו כחברים באגוד או חדשו את חברותכם! טופס רישום עם פרטים מלאים ניתן למצוא באתר http://www.iacmm.org.il/member.

ISCM-18

יום העיון ה-18 התקיים ב-7.4.2005 בפקולטה להנדסה אזרחית וסביבתית בטכניון. המארגן המקומי היה פרופ' משה איזנברגר. יום העיון היה מוצלח ומעניין, וכלל הרצאה מוזמנת של פרופ' אורי קירש (מהפקולטה הנ"ל), חוקר מהמובילים בעולם בתחום האופטימיזציה, על אנליזה מכוונות לתכן מבנים. גם הכתבה על קמטים בממברנה המופיעה בגליון זה מבוססת על עבודה שהוצגה ביום העיון.

ISCM-19

יום העיון ה-19 יתקיים ב-27.10.05 במכללה האקדמית תל אביב-יפו. המארגנים המקומיים הם בוריס אפשטיין והלל טל-עוז. ראו פרטים נוספים באתר האגוד.

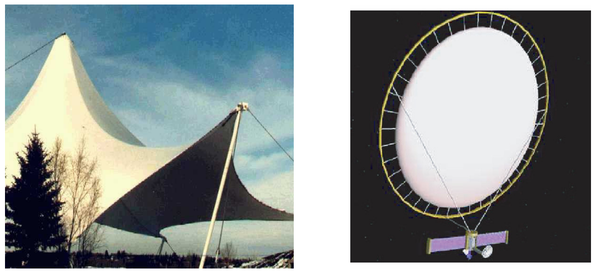
אנליזה לא לינארית גיאומטרית לחיזוי קמטים בממברנות, באמצעות אלמנטים סופיים

משה זילכה
הפקולטה להנדסה אזרחית וסביבתית, טכניון
kikozelkha@yahoo.com

ארז גל
המח' להנדסת בניין, הפקולטה להנדסה, אוניברסיטת בן-גוריון בנגב
erezgal@bgumail.bgu.ac.il

רוברט לוי
הפקולטה להנדסה אזרחית וסביבתית, טכניון
cvrlevy@tx.technion.ac.il

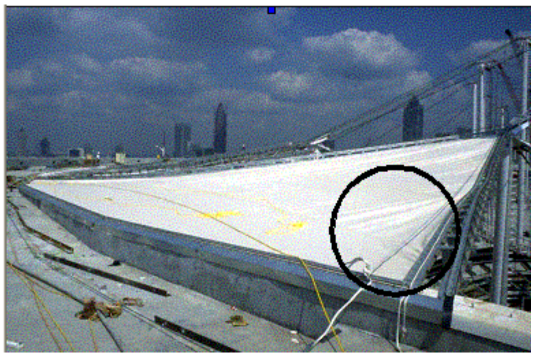
לממברנות דקות דרוכות תחילית שימושים נרחבים בכל האמור למבני יריעה, טכנולוגיות חלל (רדארים, אנטנות סולאריות) ובתעשייה (טקסטיל, צילום, דפוס) (איור 1).



איור 1 – מבני ממברנות טיפוסיים

היתרונות הבולטים של מבנים אלו הם המשקל הזניח של הממברנה המאפשר קירוי במפתחים גדולים והאפשרות ליצירת מיגון צורות מבחינה אדריכלית.

מתוך הגדרתם, ממברנות מסוגלות לקבל מאמצים במישור בלבד, מכאן שאין להן קשיחות לכפיפה וקשיחותם ללחיצה נמוכה מאוד, מאמצי הלחיצה בממברנה הם הגורמים להיווצרות הקמטים (איור 2).



איור 2 – קמטים בממברנה

הקמטים משפיעים במידה ניכרת על האיכות התפקודית והביצועית של הממברנה, ולפיכך מהווים נושא למחקר עם עניין מתמשך. מטרת אנליזת הקמטים היא לחזות מתי ואיך ייווצרו קמטים בממברנה ולחזות את כיוון הקמטים בממברנה. באנליזה המוצגת כאן קביעת מצב הממברנה מתבצע באמצעות חישוב המאמצים הראשיים בממברנה. אם נגדיר את σ_1,σ_2 כמאמצים הראשיים, כאשר $\sigma_1 \ge \sigma_2$, ישנם 3 מצבים המגדירים את מצב הממברנה מבחינת סטטוס הקימוט:

א. מצב מתוח (taut state) - $\sigma_1 > 0; \sigma_2 > 0$
במצב זה המאמצים הראשיים הם מאמצי מתיחה ולא נוצרים קמטים בממברנה.

ב. מצב קימוט (wrinkled state)- $\sigma_1 > 0; \sigma_2 \le 0$
במצב זה נוצר קמט בכיוון המאמץ הראשי σ_1 הנובע ממאמצי הלחיצה בכיוון המאמץ הניצב σ_2.

ג. מצב רפוי (slack state) $\sigma_1 \le 0; \sigma_2 \le 0$
במצב זה נוצר קמט דו כיווני בממברנה ולמעשה אלמנט הממברנה באזור זה אינו פעיל.

אופן חיזוי הקמטים בממברנה מבוצע באמצעות אנליזה לא ליניארית גיאומטרית, כאשר ישנם שני תנאי התכנסות לאנליזה:

א. אנליזה לא ליניארית גיאומטרית - הבטחת שווי משקל של הכוחות בממברנה, וזאת באמצעות שיטת ניוטון-רפסון.

ב. אנליזת קימוט - בדיקת מצב המאמצים הראשיים בממברנה לכל אורך האנליזה, ועדכון קשיחות הממברנה לסטטוס הקימוט המחושב, וזאת באמצעות המטריצה האלסטית השקילה.

אנליזה לא ליניארית גיאומטרית

האנליזה מבוצעת באופן איטרטיבי ע"י הפעלת העומס החיצוני באינקרמנטי עומס הולכים וגדלים, עבור כל צעד עמיסה מבוצעות איטרציות המעדכנות את גיאומטרית המבנה עד להשגת שווי משקל. האיטרציות מבוצעות בשיטת ניוטון-רפסון כאשר הפונקציה לה מבוצעת הליניאריזציה של ניוטון-רפסון הינה וקטור הכוחות הלא מאוזנים $\mathbf{p'}$:

$$(\mathbf{p'})^n = \mathbf{p}^n - \left(\mathbf{N}^T\mathbf{F}\right)^n \tag{1}$$

כאשר:

$\mathbf{p}^n$ - וקטור הכוחות החיצוניים באיטרציה n.

$\mathbf{F}$ - וקטור הכוחות הפנימיים באיטרציה n.

$\mathbf{N}^T$ - מטריצה המקשרת מבחינה גיאומטרית בין הכוחות הפנימיים לכוחות החיצוניים בצמתים ומעבירה את הוקטור $\mathbf{F}$ ממערכת הצירים הלוקאלית של האלמנט למערכת הגלובאלית של הממברנה.

מתוך הגדרת הוקטור $\boldsymbol{\delta}^{n+1}$, כוקטור ההזזות באיטרציה n+1, ומתוך שימוש במשוואת ניוטון-רפסון נקבל:

$$\boldsymbol{\delta}^{n+1} = -\left[\nabla\left(\mathbf{p}^n - \left(\mathbf{N}^T\mathbf{F}\right)^n\right)\right]^{-1}(\mathbf{p'})^n \tag{2}$$

כיוון ו-$\mathbf{p}^n$ הינו קבוע לכל אורך צעד העמיסה, אזי $\nabla\mathbf{p} = 0$ ומתקבלת את המשוואה הבאה:

$$\nabla\left(\mathbf{N}^T\mathbf{F}\right) = \mathbf{N}^T\nabla\mathbf{F} + \nabla\mathbf{N}^T\mathbf{F}_{fixed} = \mathbf{K}_E + \mathbf{K}_G \tag{3}$$

כאשר:

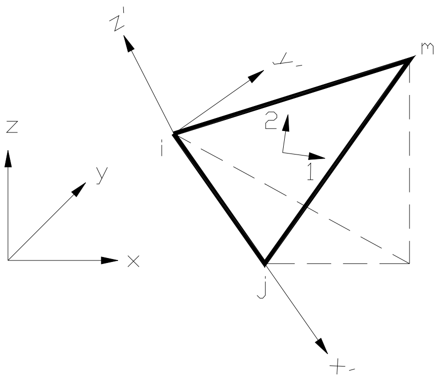
$\mathbf{K}_E$ - מטריצת הקשיחות האלסטית הנתונה כשינוי שחל בוקטור הכוחות כאשר המטריצה N מקובעת.

$\mathbf{K}_G$ - מטריצת הקשיחות הגיאומטרית הנתונה כשינוי שחל בוקטור הכוחות כאשר הכוחות הפנימיים מקובעים.

מתוך הצבה של משוואה 3 לתוך משוואה 2, תתקבל משוואת שווי המשקל בקואורדינטות גלובאליות:

$$\left(\mathbf{K}^n{}_E + \mathbf{K}^n{}_G\right)\boldsymbol{\delta}^{n+1} = (\mathbf{p'})^n \tag{4}$$

כאמור, השגת שווי המשקל נעשית בצורה איטרטיבית עד להשגת התכנסות בה הכוח הלא מאוזן $\mathbf{p'}$ קטן מספיק. האנליזה לחישוב הכוחות ומטריצות הקשיחויות נעשית באמצעות שיטת האלמנטים הסופיים. באנליזה המוצגת נעשה שימוש באלמנטים משולשים בעלי מאמץ קבוע (CST) (איור 3).



איור 3 – מערכת הקואורדינות והאלמנט הבסיסי

כל אלמנט מוגדר ע"י 3 נקודות i,j,m כך שבכל נקודה שתי דרגות חופש המוגדרות כהזזה בכיוונים x,y, כמו-כן לצורך האנליזה מוגדרות 3 מערכות צירים, הראשונה המערכת הגלובלית של המבנה x,y,z המשמשת לחישוב ההזזות והכוח הלא מאוזן, השניה המערכת הלוקאלית של האלמנט x`,y`,z` המשמשת לחישוב מטריצות הקשיחויות והכוחות הפנימיים,

והשלישית מערכת הקואורדינטות של הצירים הראשיים באלמנט המשמשת לקביעת סטטוס האלמנט מבחינת מצב הקימוט ולחישוב מטריצת האלסטיות השקילה.

אנליזת הקימוט

כאמור באנליזה זו מבוצע עדכון של קשיחות האלמנטים בממברנה לסטטוס הקימוט המתאים וזאת ע״י עדכון המטריצה האלסטית של אלמנט הממברנה. בתחילת האנליזה מבוצעת ההנחה שכל האלמנטים בממברנה במצב מתוח, לכל אורך האנליזה מחושבים המאמצים הראשיים באלמנטים, כך שעדכון הקשיחות של האלמנטים מבוצע באמצעות המטריצה האלסטית השקילה המתאימה לכל מצב קימוט, כך שעבור:

מצב מתוח – במצב זה המטריצה האלסטית היא של חומר איזוטרופי ונתונה ע״י:

$$\mathbf{D}_{\mathrm{Taut}} = \frac{E}{1-\nu^2}\begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \tag{5}$$

מצב קימוט - במצב זה המטריצה האלסטית היא של חומר אנאיזוטרופי, כך שתיוותר קשיחות בכיוון σ_1 בלבד:

$$\mathbf{D}_{\mathrm{Wrinkled}} = \begin{bmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{6}$$

מצב רפוי - במצב זה האלמנט אינו פעיל ובעל קשיחות אפס:

$$\mathbf{D}_{\mathrm{Slack}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{7}$$

המטריצות הנתונות במשוואות 5-7 נתונות במערכת הצירים של המאמצים הראשיים באלמנטים ומשמשות לצורך עדכון מטריצת הקשיחות האלסטית של האלמנט לכל מצב קימוט, תהליך זה מבוצע בצורה איטרטיבית עד להשגת התכנסות בין סטטוס האלמנט שהונח בתחילת האיטרציה לבין הסטטוס שהתקבל בסוף האיטרציה מתוך חישוב המאמצים הראשיים. המעבר בין סטטוס קימוט אחד לסטטוס אחר דורש עדכון נוסף של מצב המאמצים באלמנטים, כאשר מעבר למצב רפוי יגרום לאיפוס המאמצים באלמנט:

מצב רפוי - $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy} = 0$

ומעבר למצב קימוט יגרום לאיפוס המאמצים בכיוון המאמץ הראשי σ_2:

מצב קימוט - $\sigma_1 = \sigma_1,\ \ \sigma_2 = 0$

עדכון מאמצים זה יגרום לשינוי בכוח הלא מאוזן ובהתחלתה של האנליזה הלא ליניארית גיאומטרית מהתחלה.

סיכום אנליזת התכן

ניתן לסכם את אנליזת התכן באמצעות הצעדים הבאים:

1. הפעלת צעד עמיסה.
2. ניחוש ראשוני מבוצע או נלקח מתוך האיטרציה הקודמת לסטטוס הקימוט של האלמנטים בממברנה ע״י קביעת המטריצה האלסטית השקילה D .

אנליזה לא ליניארית גיאומטרית:

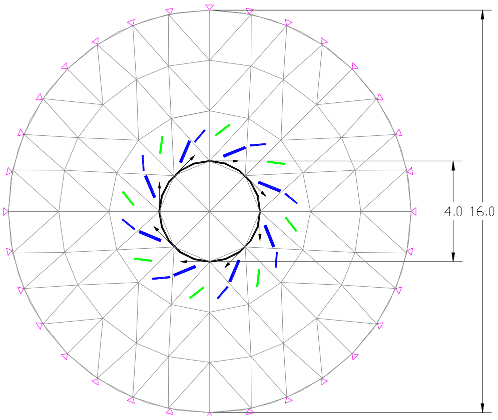
3. חישוב הכוח הלא מאוזן (משוואה 1).
4. חישוב ההזזות (משוואה 4).
5. עדכון גיאומטרית המבנה בעקבות ההזזות
6. חישוב המאמצים באלמנטים בעקבות ההזזות
7. חזרה לצעדים 3-6 עד שהכוח הלא מאוזן יהיה קטן מספיק $\mathbf{p}' \to 0$.

אנליזת הקימוט:

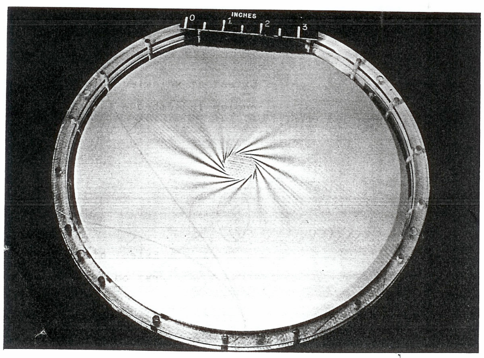
8. חישוב המאמצים הראשיים באלמנטים.
9. קביעת המטריצה האלסטית השקילה D לכל אלמנט ע״פ סטטוס הקימוט הנובע ממצב המאמצים הראשיים (משוואות 5-7).
10. עבור אלמנטים ששינו סטטוס קימוט עדכון המאמצים באלמנט.
11. חזרה על צעדים 2-10 עד להשגת התכנסות בין סטטוס הקימוט שהונח בצעד 2 לזה שהתקבל בצעד 9.

דוגמאות

כדוגמא ראשונה נלקחה ממברנה עגולה הלקוחה מתוך מאמרם של Miller & Hedegepeth (1982). הממברנה המתוארת באיור 4 תמוכה לכל אורך היקפה ועשויה מ-Mylar sheet. הממברנה דרוכה תחילית בשיעור נתון. לאחר הדריכה מחובר לממברנה במרכזה מוט קשיח, ובאמצעותו מופעל מומנט פיתול בשיעור נתון בכיוון השעון. תוצאות האנליזה – גדלי הקמטים וכיוונם – מתוארות באיור 4, ומראות התאמה טובה לניסוי שבוצע ע״י Miller & Hedegepeth המתואר באיור 5.



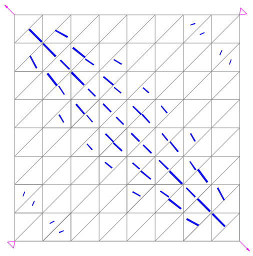
איור 4 – פיתול של ממברנה מעגלית



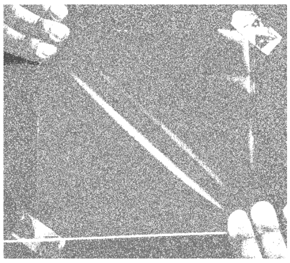
איור 5 – תוצאות הניסוי לבעיה הנ״ל, מתוך Miller & Hedegepeth

כדוגמא נוספת נלקחה ממברנה ריבועית התמוכה בשתי קצותיה דרוכה תחילית בשיעור נתון. לאחר הדריכה מופעלים שני כוחות שווים בגודלם בקצוות המנוגדים לנקודות התמיכה. גדלי הקמטים וכיוונם כפי שהתקבלו מהאנליזה מתוארים באיור 6. לצורך השוואת התוצאות בוצע ניסוי איכותי המתואר באיור 7.

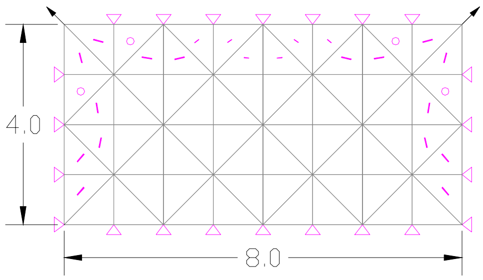
כדוגמא אחרונה נלקחה ממברנה מלבנית במידות 4x8 מ׳ התמוכה לכל היקפה פרט לשתי הקצוות העליונות בהן מופעל כוח. הממברנה דרוכה תחילית בשיעור נתון. תוצאות האנליזה גדלי הקמטים וכיוונם מתוארים באיור 8, כאשר אלמנטים המסומנים בעיגול מציינים אלמנטים שהגיעו למצב רפוי. באיור 9 מתוארת צורת הקמטים בצורה סכמתית.



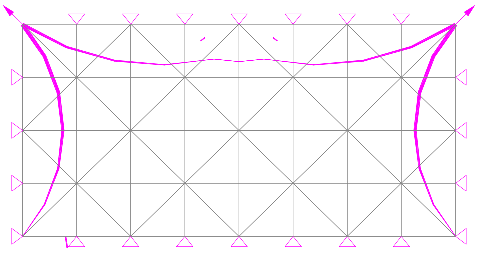
איור 6 – העמסה של ממברנה ריבועית



איור 7 – ניסוי איכותי להעמסה של ממברנה ריבועית



איור 8 – העמסת ממברנה מלבנית



איור 9 – אפיון הקמטים בצורה סכמתית לדוגמא הנ"ל

מראי מקום:

1. Ding H, Yang D, "The Modeling and Numerical Analysis of Wrinkled Membranes", *Int. Journal for Numerical Methods in Engineering 2003; 58:1785-1801.*
2. Levy R, Spillers WR, "Analysis of Geometrically Nonlinear Structures", *New York: Chapman & Hall; 1994.*
3. Miller RR, Hedegepth JM, "An Algorithm for Finite Element Analysis for Partly Wrinkled Membranes", *AIAA Journal 1982; 20(12):1761-1763.*
4. Tabbarrok B, Qin Z, "Nonlinear Analysis of Tension Structures", *Computer and Structures 1992; 45: 973-984.*

מהעיתונות

בעתון "הארץ", 11.4.05, מצוטט ג'ון מוראטור, מנהל הנדסת המערכות של מעבורת החלל ב-NASA, כאומר, בעקבות דו"ח ועדת החקירה של אסון המעבורת "קולומביה": "כדי ש-NASA תהיה חכמה יותר עליה להפסיק להסתמך על מודלים ממוחשבים ולהתחיל להטיס שוב את מעבורת החלל". קשה להאמין שקיימים מהנדסים שחושבים כך, לא כל שכן מהנדסים בכירים ב-NASA!

פינת השגיאה הקטנה

אנו פותחים כאן במדור חדש. בכל שבוע יסקר במדור זה סוג מסויים של שגיאה מבין השגיאות שבהן נתקלים תוך כדי פתרון בעיות במכניקה בשיטות חישוביות.

סוג השגיאה שנתייחס אליו הפעם הוא **שגיאת המודל המתימטי**. שגיאה זו היא היסודית ביותר, היא קיימת תמיד, והיא גם בד"כ הקשה ביותר לניתוח.

כאשר אנו מנסים לתקוף בעיה פיסיקלית או הנדסית מסויימת, הצעד הראשון הוא להחליט על המודל המתימטי – הגיאומטריה, המשוואות המתימטיות ותנאי השפה וההתחלה המתארים את הבעיה. אם, לדוגמה, נרצה לבנות מודל מתימטי לבעיה של כפיפה של טבלה מחומר מרוכב, נצטרך להחליט באיזה דיוק למדל את הגיאומטריה שלה (למשל, האם יש צורך להתחשב בשינויים קטנים בעובי), האם הבעיה היא תלת-מימדית או דו מימדית, מהו התאור הקינמטי המתאים לדפורמציה (תזוזות/עבורים/סיבובים גדולים/בינוניים/ קטנים?), אלו משוואות שולטות בטבלה (בהנחה שמדובר במשוואות לינאריות – קירכהוף-לאב? רייזנר-מינדלין? תיאוריות טבלה מסדר גבוה? משוואות אלסטיות לינארית תלת-מימדית?), כיצד למדל את תכונות החומר המרוכב (בעזרת הומוגניזציה? שכבה-שכבה? כל סיב בנפרד?), אלו אפקטים חיצוניים לקחת בחשבון (השפעה של לחות? של טמפרטורה?) ועוד מספר רב מאד של החלטות כגון אלו. בבעיה של זרימה נצטרך להניח הנחות לגבי הצמיגות, הדחיסות, ההתנהגות החומרית של הזורם, קיום או אי-קיום של אפקטים שונים כגון מתח פנים והשפעה של שדה מגנטי, וכו'.

חשוב להיות מודע לכך ששום מודל מתימטי, יהיה מסובך ככל שיהיה, לא מסוגל לתאר בדיוק אינסופי את המערכת הפיסיקלית המציאותית. תמיד קיימים אפקטים שלא נלקחים בחשבון במודל. (למעשה, הנחת הרצף כשלעצמה מהווה קירוב בלבד, ובמקרים מסויימים – כגון ליד קצה סדק – אינה תמיד מוצדקת.) כמובן, "החוכמה" היא להחליט אלו אפקטים הם חשובים וחייבים להכלל במודל ואלו ניתנים להזנחה. כאן השימוש בידע, ניסיון ואינטואיציה הנדסיים ופיסיקליים הם הכרחיים.

הערכת שגיאת המודל המתימטי א-פריורי (מראש) היא קשה ביותר. גם הערכה בדיעבד של שגיאה זו היא קשה. הגישה המקובלת היא להשוות תוצאות מסויימות שהמודל חוזה לתוצאות ניסוי; התאמה טובה מהווה ראיה לתקפות של המודל המתימטי (וגם של הפתרון הנומרי). אם ההתאמה אינה טובה, ויש בטחון רב בשיטה הנומרית ובתוצאות הניסוי, יש הגיון לשפר את המודל המתימטי, למשל ע"י הוספת אפקט שהוזנח קודם.

השגיאה הכוללת המתקבלת בפתרון בעיה מסויימת היא סכום של שגיאת המודל המתימטי והשגיאה החישובית (הנומרית). עניין זה מוביל לשאלה חשובה שנשאלת לעיתים. מכיוון שגיאת המודל המתימטי קיימת תמיד, האם יש משמעות לשאיפה לשגיאה נומרית קטנה ככל האפשר – שאיפה שמקובלת מאד אצל אנשי מכניקה חישובית? לדוגמה, ישנן שיטות חישוביות המבטיחות תוצאות עם דיוק פנטסטי, לעיתים עד כדי דיוק המכונה. אבל מה המשמעות של קבלת שגיאה חישובית של 0.0001% כאשר שגיאת המודל המתימטי היא כבר 2%?

הגישה המאומצת ע"י רוב רובם של אנשי מכניקה חישובית היא שבגלל חוסר הודאות השורר לגבי שגיאת המודל המתימטי, יש להפריד הפרדה מוחלטת בין שני השלבים – השלב שבו בונים את (או מחליטים על) המודל המתימטי ושלב האנליזה החישובית. ברגע שהמודל המתימטי נקבע, יש לשאוף לשגיאה הנומרית הקטנה ביותר האפשרית (במשאבי המחשב הנתונים).