עלון אישח"מ

עלון האיגוד הישראלי לשיטות חישוביות במכניקה

מרץ 2006 מספר 15

עורך: דן גבעולי, הפקולטה להנדסת אוירונוטיקה וחלל, טכניון, חיפה 32000,
טל. 8293814 (04), פקס 8292030 (04), דואר אלקטרוני: givolid@aerodyne.technion.ac.il

אתר אישח"מ (IACMM) באינטרנט: http://www.iacmm.org.il
רישום לחברות באגוד ופרטים נוספים: באתר האגוד הנ"ל, או פנו למזכיר-גזבר,
ד"ר עמנואל אור, טל. 9908640 (04), פקס 9908164 (04), דואר אלקטרוני: emanuelo@rafael.co.il

---

הערות העורך:
נא שלחו לכתובת המערכת (בדואר אלקטרוני או רגיל) חומר לפרסום בעלון. ניתן ורצוי לצרף ציורים ותמונות. לידיעת חברות: ניתן גם לפרסם חומר מסחרי- פרסומי בתשלום. לפרטים נא לפנות למערכת. גירסה צבעונית של עלון זה מופיעה באתר האגוד (ראה לעיל).

חידוש רישום באגוד:
אנא הרשמו כחברים באגוד או חדשו את חברותכם! טופס רישום עם פרטים מלאים ניתן למצוא באתר
http://www.iacmm.org.il/member.

דבר הנשיא
גיליון חגיגי מורחב זה של עלון אישח"מ מופץ לקראת יום העיון העשרים במכניקה חישובית, שייערך על ידי האיגוד הישראלי לשיטות חישוביות במכניקה (אישח"מ) ביום חמישי, 23 במרץ 2006.

חישוב הנדסי ומדעי, התחום המשתמש בשיטות והתקנים חישוביים לתאר תופעות פיזיקליות ומערכות הנדסיות, כבר נחשב לאחת ההתפתחויות החשובות ביותר, כאשר החישוב מקבל מעמד מכובד של אחד מעמודי התווך במחקר מדעי, לצד התיאוריה והניסוי המוכרים. המכניקה החישובית הינה מרכיב חיוני בחישוב הנדסי ומדעי, המשתמש בחישוב על מנת לאפיין ולחזות התנהגות הנשלטת על ידי חוקי המכניקה, במובן הרחב ביותר.

בישראל, הפעילות המקצועית בתחום זה קבלה מסגרת ממוסדת כאשר אישח"מ נוסד בשנת 1995, על ידי פרופ' פנחס בר-יוסף, פרופ' דן גבעולי והחתום מטה. בנוסף לאנשים אלו פועל באיגוד צוות מסור של בעלי תפקידים וחברי וועד, ששמותיהם רשומים בראש גיליון זה, התורמים מזמנם בהתנדבות ובאופן שוטף כדי לדאוג לניהול תקין של ענייני האיגוד.

בעשר השנים האחרונות התפתח האיגוד והיום נמנים על חבריו רבים מהאקדמיה ומהתעשייה. מוקד פעילותו של האיגוד הינו קיום ימי עיון פעמיים בשנה, ובחודש מרץ הקרוב נציין את יום העיון העשרים בסדרה. במסגרת ימי העיון הגיעו לישראל אחדים מהמדענים המובילים בעולם בתחום המכניקה החישובית כדי לשאת הרצאות מפתח. ביקורים אלו ראויים לציון מיוחד לאור הקשיים המדיניים והביטחוניים המתעוררים לעיתים. כמו כן, במרבית ימי העיון ניתנת הרצאת לומדה בה מומחה מציג נושא מסוים בתחום מומחיותו באווירה לימודית נינוחה. ימי העיון מהווים גם הזדמנות למפגש לא פורמאלי ולהחלפת דעות בין אנשי המקצוע בתחום המכניקה החישובית.

האיגוד רואה חשיבות מיוחדת בטיפוח חוקרים ומהנדסים צעירים. במסגרת זו קיים תחרויות מאמרים בהן ניתנה ההזדמנות לזכות בתמיכת האיגוד בהשתתפות ובהצגת עבודת המחקר בכנסים בינלאומיים במכניקה חישובית.

לצערי, אילוצים כספיים מונעים המשך קיום תחרויות אלו במצב הנוכחי.

עלון האיגוד, שגיליון חגיגי מורחב זה הינו החמישה עשר בסדרה, מופק אף הוא באופן קבוע, פעמיים בשנה, לקראת כל יום עיון ומופץ לחברי האיגוד. כמו כן מקיים האיגוד אתר אינטרנט (כתובתו רשומה בראש הגליון) ולוח תפוצה אלקטרוני.

האיגוד הישראלי מקיים קשרים שוטפים עם איגודים מקבילים בארצות רבות. האיגוד הינו חבר באיגוד הגג הבינלאומי IACM, שביטאונו מופץ לחברי אישח״מ, וכן משתייך לאיגוד האירופאי ECCOMAS. גם כאן ראוי לציין שבאווירה בינלאומית לעיתים עוינת עד כדי חרם בתחומי מדע שונים, הצטיינו האיגודים הבינלאומיים בתחום המכניקה החישובית ביחס חיובי והוגן, טיפוח הקשרים עם אישח״מ והתחשבות יתרה בצרכים המיוחדים של האיגוד הישראלי. אישח״מ מיוצג בארגוני ההנהלה של האיגודים הבינלאומיים וברבות מהוועדות שלהם. נציגי אישח״מ מוזמנים דרך קבע להשתתף בוועדות המארגנות כנסים בינלאומיים, לשאת הרצאות מפתח וזוכים להוקרה מהאיגודים הבינלאומיים. עורך עלון אישח״מ אחראי לכך שכתבות על פעילות האיגוד הישראלי תתפרסמנה ברבים מגיליונות הביטאון הבינלאומי.

אישח״מ מציין השנה יותר מעשור של פעילות רבת הישגים המסתמכת בעיקר על השתתפות חברי האיגוד. בגלל היקף הקהילה המקצועית בתחום המכניקה החישובית בארץ ואופי עבודתה, פעילות האיגוד דורשת טיפוח ועידוד מתמידים. אני קורא לחברי האיגוד לראות בחברותם ותמיכתם המתמשכים באישח״מ שרות מקצועי, להפיץ את פעילות האיגוד בין עמיתיהם לעבודה ולתרום לימי העיון של האיגוד הן במתן הרצאות והן בהשתתפות.

האתגרים העיקריים העומדים לפנינו בשנים הקרובות הם הגדלת מספר חברי האיגוד ושיפור מצבו הכספי במטרה לחזור ולקיים תחרויות מאמרים ואף ליזום פעילות נוספת לרווחת הקהילה המקצועית. הצעות לשיפור מתקבלות תמיד בברכה. אני מקווה כי בשנים הבאות ימשיך האיגוד את פעילותו הפורייה ואף ירחיבה.

יצחק הררי
נשיא אישח״מ

לוגו אישח״מ

ISCM-19

יום העיון ה-19 התקיים ב-27.10.05 במכללה האקדמית תל אביב-יפו. המארגנים המקומיים היו בוריס אפשטיין והלל טל-עזר. יום העיון היה מעניין ומוצלח, וכלל הרצאת אורח של John Vassberg מחברת בואינג, שדיבר על שיטות של אופטימיזצית צורה אוירודינמית. המאמר על מודל אלמנטים בדידים המופיע בגליון זה גם הוא הוצג במסגרת יום העיון.

ISCM-20

יום העיון ה-20 יתקיים ב-23.3.06 באוניברסיטת ת״א. פרטים נוספים ניתן למצוא באתר אישח״מ.

מודל אלמנטים בדידים ליצוג חומר גרגרי חיכוכי

צביקה אסף*, דרור רובינשטיין ויצחק שמולביץ
הפקולטה להנדסה אזרחית וסביבתית, טכניון
* agasaf@tx.technion.ac.il

יחסי הגומלין בין גוף קשיח או גמיש לקרקע הינם פעולה מורכבת עקב חוסר האחידות הרב הקיים בחומר המרכיב את הקרקע, ההתנהגות הלא ליניארית של חומר זה, הדינאמיות של התהליך והעובדה שהקרקע משנה את התנהגותה ממצב של חומר מוצק לזורם ומחומר רציף לחומר המורכב מגרגרים בודדים. כדי לתת מענה לבעיה זו פותחו במהלך השנים מודלים אמפיריים, אנליטיים ונומריים לתיאור יחסי הגומלין בין כלי עיבוד, גלגל וזחל עם הקרקע. בגלל הסיבוכיות הרבה של התהליך, למרות מגוון המודלים שפותחו עדיין לא קיים כלי היכול למדל את יחסי הגומלין בין כלי לקרקע ולספק את מכלול הפתרונות לבעיה. המודלים הנומריים כדוגמת אלמנטים סופיים נותנים מענה למידול של אינטראקציות בין קרקע לגופים מורכבים ללא דרישה להנחות המוקדמות. אבל גם מודלים אלו אינם מספקים ביטוי לאופי הגרגרי של הקרקע, ומתקשים למדל תופעות כגון סידוק, ערבוב והזרימה הקיימת בפן הביניים בין הכלי לקרקע ובין שכבות הקרקע.

שיטת האלמנטים הבדידים (Discrete Element Method - DEM) היא גישה נומרית שנועדה למדל התנהגות של חומר גרנולרי (גרגרי) ויחסי גומלין בין חומר זה לגוף קשיח או גמיש. השיטה הינה דינמית ומאפשרת מעבר ממצב של חומר רציף לבדיד, זרימה של חלקיקי החומר, יצירה ופירוק של תלכידים. נוסף לכך החלקיקים אינם מוגבלים בצורתם והמורכבות הגיאומטרית של הגוף אינה מהווה חסם בתהליך המידול. לאור זאת שיטת האלמנטים הבדידים נראית כאמצעי הנכון ביותר לטיפול ביחסי כלי/מבנה קרקע מבחינה כמותית ואיכותית.

המודל השכיח ביותר של השיטה פותח ע״י Cundall ו-Strack ב-1979 [1]. מודל זה מבוסס על ההנחות הבאות: החומר מיוצג ע״י קבוצה של חלקיקים. הקשרים בין החלקיקים מיוצגים ע״י קפיצים, מרסנים, חיכוך קולוני, כוחות קוהזיה או כל כוח נוסף הנדרש לצורך תיאור חוקי המגע של החומר. קשרים אלו אינם חייבים להיות ליניאריים. התנהגות החומר כתגובה לכוחות, מאמצים או דפורמציות המופעלים עליו מחושבת ע״י רישום ופתרון משוואות התנועה לפי החוק השני של ניוטון עבור כל חלקיק בנפרד בהתאם לשקול הכוחות המופעל עליו. עדכון מיקום החלקיק מבוצע ע״י אינטגרציה ישירה של משוואות התנועה בכל צעד זמן. הדפורמציה של החלקיק בזמן מגע קטנה מאוד ביחס לגודלו ושינוי בתווך נובע מתנועת החלקיקים ולא בגלל הדפורמציה שלהם.

מודלים של יחסי מכונה קרקע תוך שימוש בשיטת האלמנטים הבדידים הוצגו ע״י חוקרים רבים עם תוצאות איכותיות טובות, ובחלק מהמקרים גם תוצאות כמותיות התואמות תוצאות ניסוי בקרה, אבל בכל המקרים הפרמטרים למודל נמצאו בשיטת ניסוי וטעייה.
הקושי מובנה בכך ששיטת האלמנטים הבדידים מבוססת על חוקי ופרמטרי המיקרו של החומר ואילו תכונות הקרקע הנמדדות כיום הם בעיקר תכונות מקרו. מהנאמר, עדיין חסרה שיטה מובנית לחישוב תכונות המיקרו מתוך מדידות המקרו לתווך הקרקע.

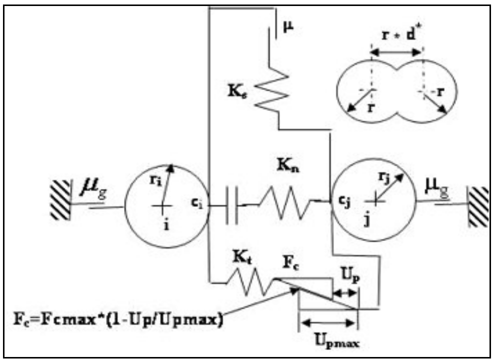
קיימות שיטות אנליטיות לחישוב תכונות המיקרו בזמן מגע בין גופים על סמך ידיעת התכונות האלסטיות של

החלקיקים, אך שיטות אלו אינן נותנות תשובות מוחלטות עבור חומר מורכב כמו קרקע. מצד שני גישות חישוב אלו בהחלט יכולות לשמש כבסיס להערכה ראשונית של פרמטרי המיקרו מתוך מדידות המקרו, וכך אכן נעשה במהלך השיטה שפותחה. השיטה מתבססת גם על העבודה של Rubinstein et al. [2] עבור מציאת פרמטרים למודל FEM ליצוג קרקע באמצעות שיטת הפתרון ההפוך על סמך ביצוע מספר בדיקות בקרקע בשטח.

מטרות המחקר נגזרו ממצב הידע שהוצג עד כה:
1. מציאת שיטה לחישוב פרמטרים ליצוג קרקע גרנולרית חסרת קוהזיה במודל אלמנטים בדידים ובחינת אמינותה.
2. ביסוס השיטה באמצעות בדיקות בשטח במצב הטבעי של החומר הגרנולרי. המחקר הנוכחי התרכז במידול דו-ממדי ותופעות קווזי סטטיות.

תאור המודל

יחסי כלי קרקע במחקר מודלו באמצעות תוכנת DEM מסחרית דו ממדית PFC2D [3]. מודל המגע בין שני חלקיקים בו נעשה שימוש במהלך המחקר מוצג בציור 1. חלקיקי הקרקע יוצגו באמצעות צמדים של שתי דיסקאות בעלות רדיוס שווה r. באופן זה התקבלה התנהגות דומה יותר למציאות לעומת חלקיקים עגולים בודדים. המודל מורכב משני חלקיקים i ו-j. בין שני החלקיקים במגע מוצב קפיץ בעל מקדם Kn לחישוב הכוחות בכיוון הנורמאלי. עבור הכיוון המשיק מוצב קפיץ בעל קבוע Ks בטור עם אלמנט חיכוך קולוני μ. כאשר שני חלקיקים מתרחקים אחד מהשני מופעל ביניהם קפיץ מתיחה Kt עד כוח כניעה Fc ובהמשך כוח המשיכה יורד ככל שהחלקיקים ממשיכים להתרחק עד ניתוק. הריסון במערכת תלוי רק בכיוון התנועה ולא במהירותה והוא פרופורציוני לכוח הפועל בין החלקיקים ומסומן ב- μ_g. למרות שהמחקר לא עסק בחומר קוהזיבי נמצא שבכל חומר קימת מידה מסוימת של קוהזיה. בנוסף לכך נימצא כי הוספת מנגנון הקוהזיה שיפרה את היציבות הנומרית של הפתרון. בפועל הוצבו במודל ערכים שהובילו לקוהזיה בעלת ערכים נמוכים מאוד.

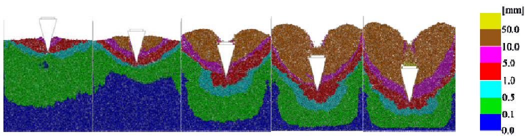


ציור 1. מודל המגע בין שני חלקיקים במודל ה-DEM .

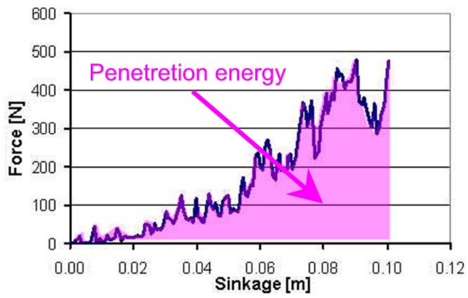
הסימולציות

במהלך המחקר בוצעו מספר ניסויים במעבדה. מול כל ניסוי בוצעה סימולציה תואמת בעזרת מודל אלמנטים בדידים בתוך שהורכב מ- 10,000 חלקיקים כגון אלו המוצגים בציור 1. תמונות המתארות שלבים שונים של סימולציית החדרת טריז מוצגות בציור 2 כאשר הגוונים מציינים שיעורי תזוזה שונים של חלקיקי הקרקע ומאפשרים מעקב אחרי הדפורמציות שחלו בה במהלך הסימולציה. תוצאות אופייניות לסימולציות הניסוי הם קו כוח-שקיעה שדוגמה אופיינית שלו מובאת בציור 3 כאשר השטח מתחת לקו הינו האנרגיה שנצרכה בתהליך.

כדי למדוד את תכונות המקרו של הקרקע: מקדם חיכוך בין החלקיקים וקוהזיה, תוכנן ונבנה עבור המחקר מכשיר מעבדה להדמיית גזירה עם פלטה בקרקע לא מופרת. גם במקרה זה בוצעה סימולציית ניסוי מקבילה לניסוי הגזירה בעזרת מודל אלמנטים בדידים. תוצאות אופייניות המתארות סימולציה זו מוצגות בציור 4. מתוך ניסוי כזה נמדד או מחושב קו כוח גזירה כפונקציה של הדפורמציה האופקית, עבור עומס נורמאלי נתון. תוצאה אופינית של ניסוי גזירה מוצגת בציור 5. מתוך סדרה של מספר ניסויים כאלו בעומסים אנכיים שונים מחושב מקדם החיכוך והקוהזיה של הקרקע וגם מקדמים לתיאור קו כוח הגזירה כפונקציה של התזוזה האופקית.



ציור 2. סימולציה של לחיצת טריז במודל DEM . הגוונים השונים מציינים דפורמציה שונה של הקרקע.



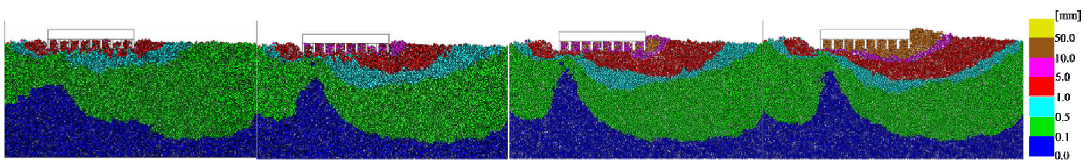
ציור 3. תוצאות קו כוח שקיעה המתקבלות בניסוי לחיצת טריז אופייני והגדרת ערך האנרגיה של התהליך.

חישוב הפרמטרים ליצוג קרקע גרנולרית

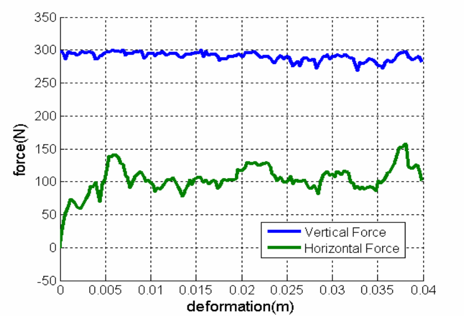
בהמשך המחקר חושבו הפרמטרים ליצוג קרקע גרנולרית חסרת קוהזיה במודל אלמנטים בדידים. פרטים על השיטה ניתן למצוא במאמרים [4] ו-[5] של המחברים. המסקנות מחקירה זו הן כדלקמן:

1. עבור מידול קרקע חיכוכית נתונה נימצא כי מספיקה התאמה של שני פרמטרים בלבד במודל אלמנטים בדידים: קבוע הקפיץ ומקדם החיכוך. שאר הפרמטרים נקבעים מראש בתחום מסוים ועשויים לייצג מספר סוגי קרקע.

2. קיים קשר בין האנרגיה הנמדדת בלחיצת טריז למקדם החיכוך בחומר הגרנולרי.



ציור 4. תמונות מתוך שלבים שונים של סימולציה של גזירה עם פלטה. הצבעים מיצגים דפורמציה שונה של חלקיקי הקרקע.



ציור 5. תוצאות קו כוח אופקי ואנכי כתלות בדפורמציה מניסוי גזירה.

3. קיים קשר בין התגובה האלסטו-פלסטית של הקרקע הנמדדת בניסוי לחיצת פלטה למקדם הקפיץ והחיכוך של מודל אלמנטים בדידים.עובדה זו מאפשרת חישוב מקדם הקפיץ של המודל בלא יותר מ-15% שגיאה בהינתן מקדם החיכוך.

4. ניתן לחשב פרמטרים ליצוג קרקע במודל DEM בשיטת הפתרון ההפוך בהתבסס על שלוש בדיקות באתר והתהליך שפותח ואומת במסגרת העבודה הנוכחית.

5. שיטת חישוב הפרמטרים המוצעת למודל DEM מאפשרת חישוב כמותי ואיכותי של יחסי מכונה קרקע עבור קרקע חיכוכית.

סימולציות נוספות

להלן מספר תוצאות של סימולציות נוספות שנעשו בשיטת DEM.

ציור 6 מראה שלבים בסימולציה של חפירה. הצבעים מסמנים מהירויות שונות של החלקיקים. ציור 7 מראה מידול של כף דחפור לצורך ביצוע אופטימיזציה על צורת החתך. ציור 8 מראה כוחות אופקיים ואנכיים שנמדדו על כף דחפור בסימולציה לעומת כוחות שנמדדו בניסוי ודווחו ע"י Hofstetter ב-2002. עומק החיתוך הוא 25 מ"מ ומהירות ההתקדמות היא 213 מטר לשניה.

ציור 9 מראה תוצאות של סימולציה של תנועת גלגל קשיח על קרקע. הצבעים השונים מציינים דפורמציה שונה של הקרקע.

מקורות

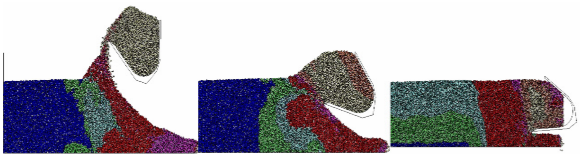
[1] Cundall P. A., Strack, O. D. L., 1979. A discrete numerical model for granular assemblies. J. Geotechnique 29(1), 47-65.

[2] Rubinstein, D., Upadhyaya, S. K., Sima, M., 1994. Determination of in-situ engineering properties of soil using response surface methodology. Journal of Terramechanics 13(2): 67-92.

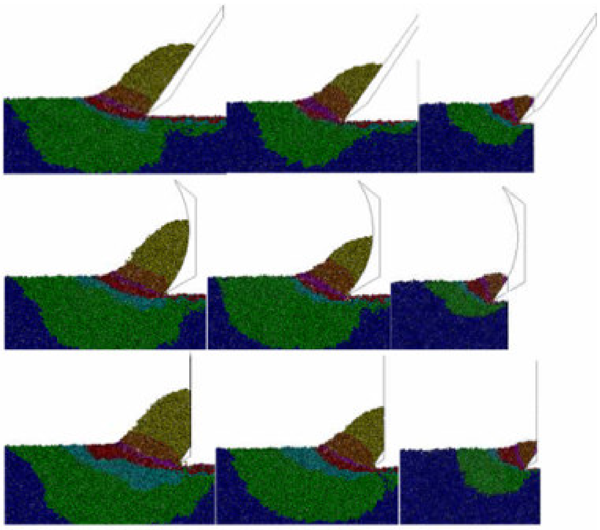
[3] Itasca, 2002. PFC2D User's Manual, Version 3.0, Itasca Consulting Group Inc., Minneapolis, Min., 55415 USA.

[4] Asaf, Z., Rubinstein, D., Shmulevich, I.. 2005. Evaluation of link-track performances using DEM. J Terramechanics - Ter. 265 (in press).

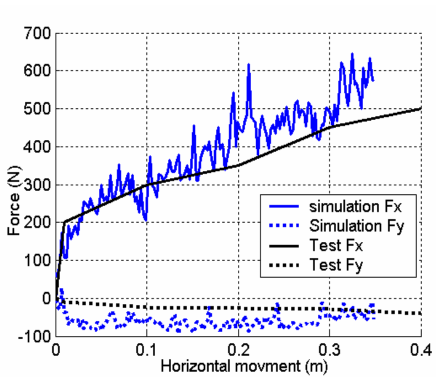
[5] Asaf, Z., Rubinstein, D., Shmulevich, I.. 2005. Determination of discrete element model parameters required for soil tillage. Proceedings of the 15th International Conference of the ISTVS Hayama, Japan, September 25-29, 2005.



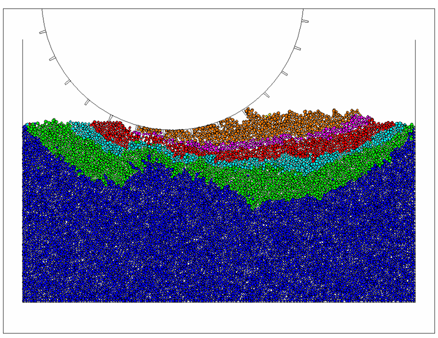
ציור 6. שלבים בסימולציה של חפירה.



ציור 7. מידול של כף דחפור לצורך ביצוע אופטימיזציה על צורת החתך.



ציור 8. כוחות אופקיים ואנכיים על כף דחפור - סימולציה לעומת מדידה בניסוי.



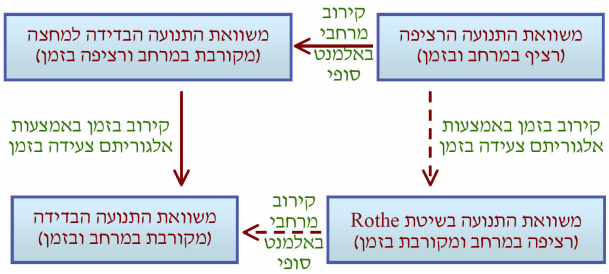
ציור 9. תוצאות של סימולציה של תנועת גלגל קשיח על קרקע.

יציבות פתרון בעיות אלסטו-דינמיקה בצעדי-זמן קטנים

ערן גרוסו grosu@eng.tau.ac.il
יצחק הררי harari@eng.tau.ac.il
המח' למכניקה, חומרים ומערכות
אוניברסיטת תל-אביב

רקע

בעיות דינמיות של גופים אלסטיים (אלסטו-דינמיקה) מנוסחות בעזרת משוואות דיפרנציאליות חלקיות הרציפות הן במרחב והן בזמן (משוואת התנועה הרציפה). הגישה המקובלת לפתרון בעיות אלו בשיטת האלמנט הסופי הינה שימוש באלגוריתמים לצעידה בזמן כגון שיטות Newmark, Houbolt ו- Wilson. הקירוב נעשה בשני שלבים, ראה איור 1. בשלב הראשון נעשה קירוב *מרחבי* בשיטת אלמנט סופי רגילות, המוביל למערכת מצומדת של משוואות דיפרנציאליות רגילות בזמן (משוואת התנועה הבדידה למחצה). לאחר מכן נעשה קירוב *בזמן* באמצעות אלגוריתמים לצעידה בזמן, וכך מתקבלת מערכת מצומדת של משוואות אלגבריות שיש לפתור בכל שלב זמן (משוואת התנועה הבדידה).



איור 1: ניסוחי משוואת התנועה השונים

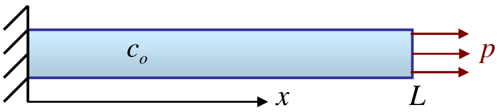
כדי להבין את ביצועי האלגוריתמים לצעידה בזמן ניתן לחשוב בצורה מודאלית, דהיינו במונחים של תדרים טבעיים והמודים המשויכים להם. ידוע שאיכות הקירוב המרחבי במשוואת התנועה הבדידה למחצה פוחתת עבור מודים המשויכים לתדרים טבעיים גבוהים יותר. לכן, פתרון באמצעות סופרפוזיציה מודאלית מתבסס על מספר קטן של מודים נמוכים יחסית. לעומת זאת, הפתרון המדויק של משוואת התנועה הבדידה למחצה, המקורב במרחב, מכיל את *כל* המודים של בעיה זו, כולל אותם מודים גבוהים שקירובם אינו טוב.

גם באלגוריתמים של צעידה בזמן רצוי להפחית את השפעת המודים הגבוהים והדבר נעשה באמצעות ריסון אלגוריתמי – אמצעי נומרי המוביל לדעיכה של אמפליטודות המודים המשויכים לתדרים הגבוהים. שיטות בעלות ריסון אלגוריתמי אכן מפחיתות את השפעת המודים הגבוהים, אך השפעה זו היא בלתי נמנעת עם הקטנת צעד-הזמן (ללא עידון מתאים של הרשת המרחבית) והתכנסות לפתרון המדויק של משוואת התנועה הבדידה למחצה (המקרב, כאמור, את הפתרון המדויק של משוואת התנועה הרציפה).

כלל הטרפז (Crank-Nicolson) הינו, ככל הנראה, שיטת הצעידה בזמן הסתומה (implicit) המקובלת ביותר מתוך משפחת שיטות Newmark. לכלל הטרפז יציבות בזמן בלתי-מותנית והינו בעל התכנסות בזמן מסדר שני, אך זוהי שיטה נטולת ריסון אלגוריתמי. שיטת generalized-α [1] מהווה שיפור לכלל הטרפז, ללא פגיעה ביציבות בזמן ובסדר ההתכנסות, בהיותה בעלת ריסון אלגוריתמי הניתן לשליטה פרמטרית. יחד עם זאת, השפעת המודים הגבוהים הינה, כאמור, בלתי נמנעת, גם עבור שיטות בעלות ריסון אלגוריתמי, עם הקטנת צעד-הזמן (ללא עידון מתאים של הרשת המרחבית).

דוגמא נומרית

מוט אלסטי בעל אורך L ומהירות קול קבועה $c_o=\sqrt{E/\rho}$ (E הינו מודול יאנג ו- ρ הינה הצפיפות), הינו נטול ריסון פיזיקלי. המוט רתום בצידו השמאלי ונתון להטרחה נורמלית קבועה p בצידו הימני, כמתואר באיור 2. המוט נמצא במנוחה התחלתית. עם הפעלת העומס מתפתח גל מאמץ המתפשט מימין לשמאל במהירות הקול. בתחום שגל המאמץ עבר שורר מאמץ p. בתחום שלפני חזית הגל (משמאל לחזית הגל), המוט שרוי במנוחה ההתחלתית מאחר וה'מידע' על התקדמות הגל עוד לא הגיע לתחום זה בגלל מהירות ההתפשטות הסופית, כמצופה על-פי עיקרון הסיבתיות.



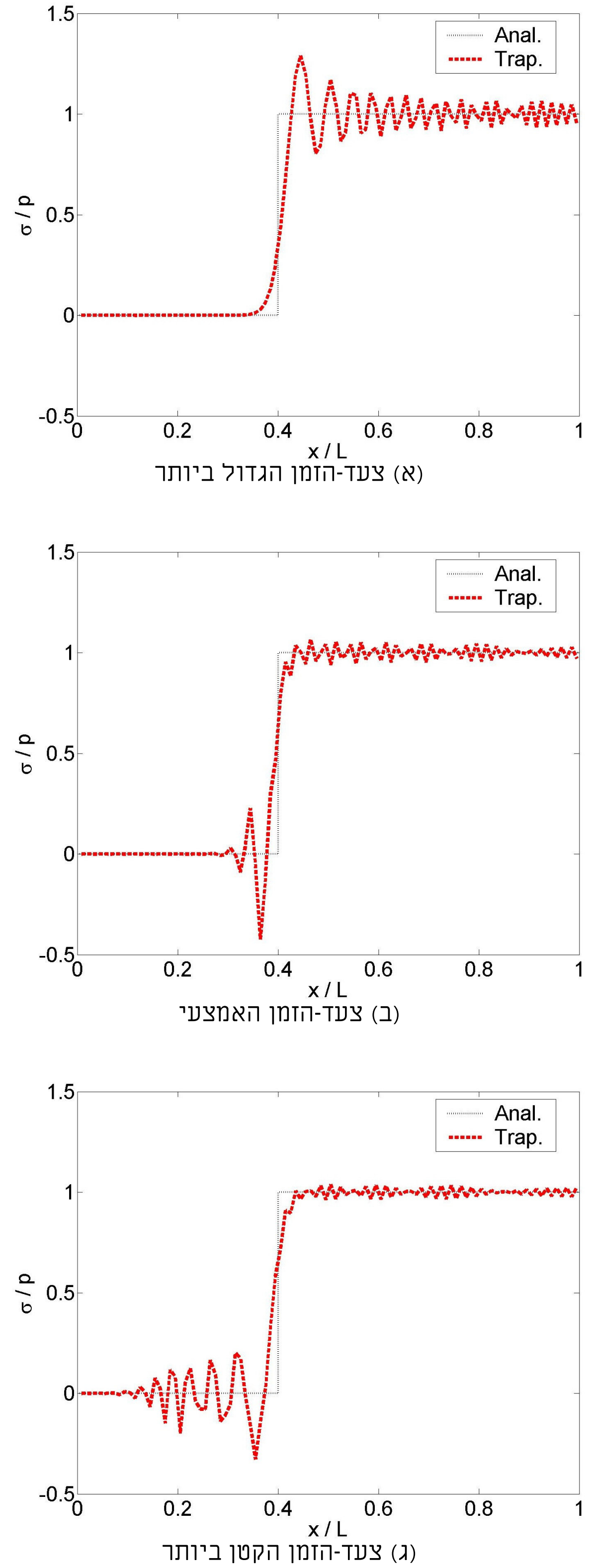
איור 2: מוט הרתום בצידו השמאלי והנתון ללחץ קבוע p בצידו הימני

עיקרון הסיבתיות (causality) הינו עיקרון בסיסי בפיסיקה קלאסית שעל-פיו סיבה קודמת למסובב, כלומר תופעה אינה יכולה להיווצר לפני שגורם התופעה גרם לכך. בהקשר לבעיות אלסטו-דינמיות, פתרונות נומריים עשויים להתאפיין באוסילציות מלאכותיות הנובעות מהשינויים החדים במאמץ משני צידי חזית הגל. במידה והאוסילציות מופיעות לפני חזית הגל הן מפרות את עיקרון הסיבתיות.

הרצות נומריות של התפשטות גל המאמץ במוט המתואר באיור 2 בוצעו על רשת מרחבית של מאה אלמנטים ליניאריים אחידים $(h=L/100)$ עבור שלושה צעדי-זמן. צעד הזמן הגדול ביותר הינו h/c_o, צעד הזמן האמצעי הינו חצי מצעד זמן זה, וצעד הזמן הקטן ביותר הינו עשירית ממנו.

פתרונות כלל הטרפז למאמץ המתפתח במוט בזמן $t=0.6L/c_o$ מוצגים באיור 3. עבור צעד-הזמן הגדול ביותר (איור 3א) מופיעות אוסילציות לאחר חזית הגל. אוסילציות אלו, הנובעות מהשינויים החדים במאמץ, אינן מרוסנות מאחר וכלל הטרפז, כאמור, נטול ריסון אלגוריתמי, אך הפתרון מקיים את עיקרון הסיבתיות. עבור צעד-הזמן האמצעי (איור 3ב) מתעוררות אוסילציות *לפני* חזית הגל המפרות את עיקרון הסיבתיות, אך הן מקומיות לאזור שלפני חזית הגל. עבור צעד-זמן זה האוסילציות לאחר חזית הגל הן בעלות אמפליטודה קטנה יחסית. האוסילציות לפני חזית הגל (המפרות את עיקרון הסיבתיות) מתגברות עם הקטנת צעד-הזמן (איור 3ג).

העדר הריסון האלגוריתמי בפתרון כלל הטרפז בולט. פתרונות שיטת generalized-α, בעלת ריסון אלגוריתמי, למאמץ המתפתח במוט בזמן $t=0.6L/c_o$ מוצגים באיור 4. עבור צעד-הזמן הגדול ביותר הפתרון מקיים את עיקרון הסיבתיות, כמצופה. אוסילציות לאחר חזית הגל, המופיעות בפתרון כלל הטרפז (איור 3א), מרוסנות בשיטת generalized-α (איור 4א), כצפוי. גם האוסילציות המקומיות, המתעוררות בצעד-הזמן האמצעי בפתרון כלל הטרפז לפני חזית הגל (איור 3ב), מרוסנות בפתרון שיטת

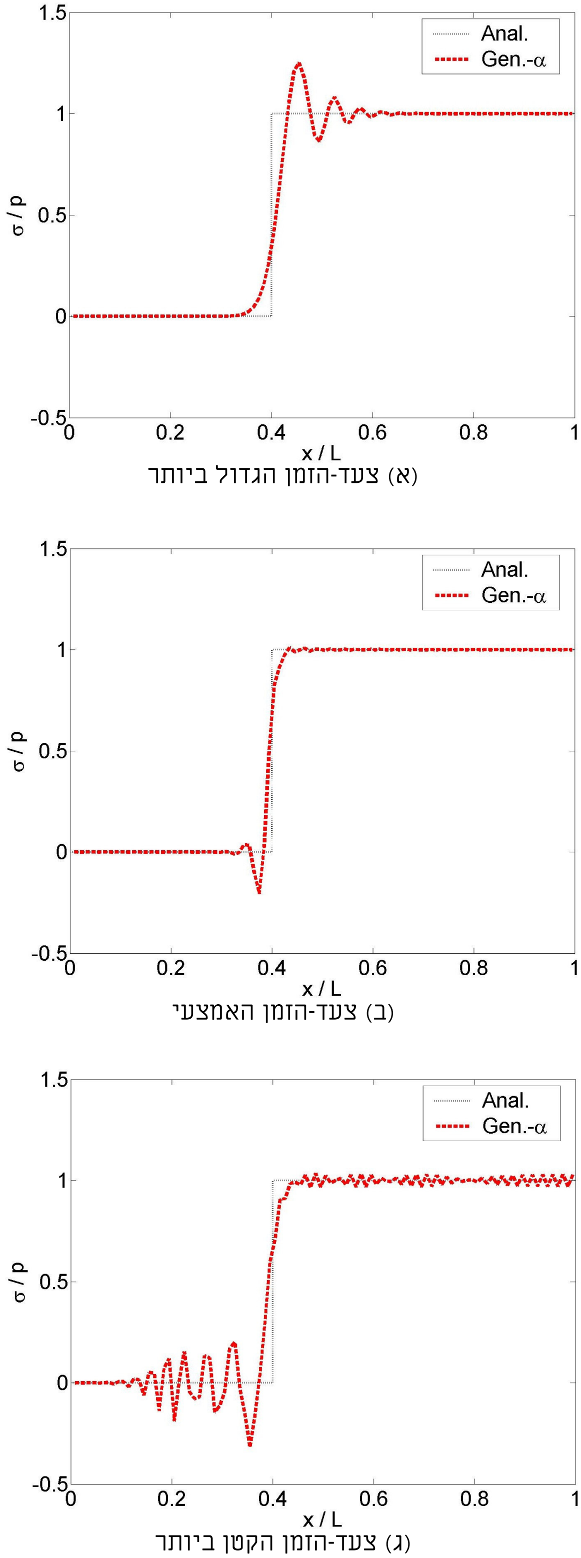


(א) צעד-הזמן הגדול ביותר

(ב) צעד-הזמן האמצעי

(ג) צעד-הזמן הקטן ביותר

איור 3: פתרונות כלל הטרפז למאמץ המתפתח במוט הנתון ללחץ בקצהו הימני עבור שלושת צעדי הזמן



(א) צעד-הזמן הגדול ביותר

(ב) צעד-הזמן האמצעי

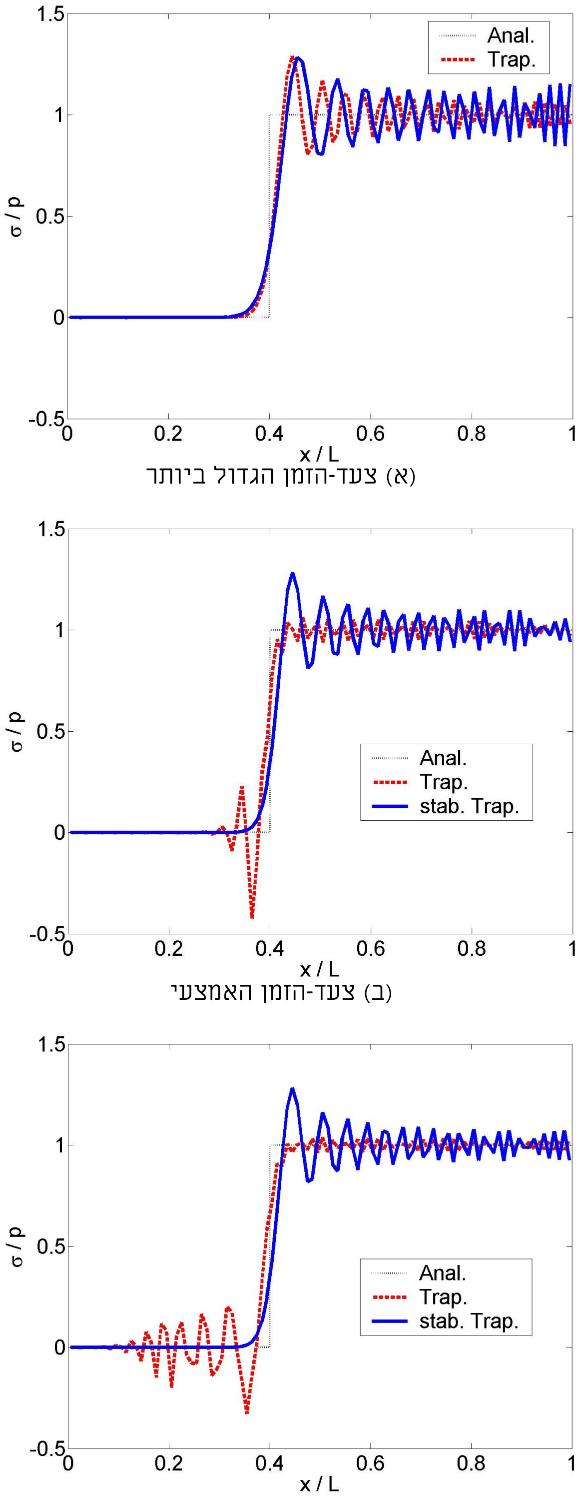
(ג) צעד-הזמן הקטן ביותר

איור 4: פתרונות שיטת generalized-α למאמץ המתפתח במוט הנתון ללחץ בקצהו הימני עבור שלושת צעדי הזמן

generalized-α (איור 4ב), אך עדיין מפרות את עיקרון הסיבתיות. עבור צעד-הזמן הקטן ביותר (איור 4ג) הפתרון המתקבל הוא למעשה הפתרון המכונס בזמן ולכן השפעת הריסון האלגוריתמי נמוגה והוא זהה לפתרון כלל הטרפז (איור 3ג).

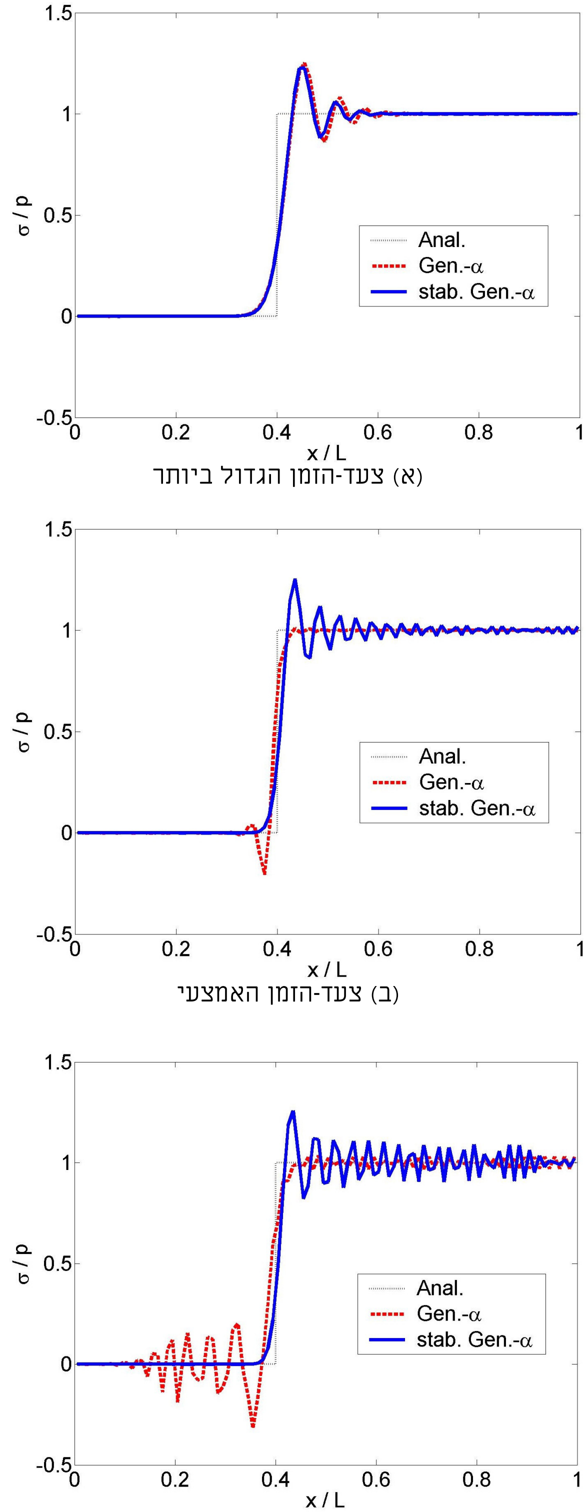
ניתוח יציבות

כאמור, הגישה המקובלת לפיתוח משוואת התנועה הבדידה היא תחילה קירוב במרחב ולאחר מכן בזמן. גישה חלופית המתאימה לניתוח השיטות לצעידה בזמן הינה תחילה קירוב בזמן ולאחר מכן במרחב, עבור כל שלב זמן



(א) צעד-הזמן הגדול ביותר
(ב) צעד-הזמן האמצעי
(ג) צעד-הזמן הקטן ביותר

איור 5: פתרונות כלל הטרפז המיוצב (בהשוואה לכלל הטרפז המקובל) למאמץ המתפתח במוט הנתון ללחץ בקצהו הימני עבור שלושת צעדי הזמן



(א) צעד-הזמן הגדול ביותר
(ב) צעד-הזמן האמצעי
(ג) צעד-הזמן הקטן ביותר

איור 6: פתרונות שיטת generalized-α המיוצבת (בהשוואה לשיטת generalized-α המקובלת) למאמץ המתפתח במוט הנתון ללחץ בקצהו הימני עבור שלושת צעדי הזמן

(שיטת Rothe, ראה איור 1). משוואת התנועה הבדידה אינה משתנה, אך בעזרת גישה זו ניתן לאפיין התדרדרות ביציבות המרחבית ולהגדיר צעד-זמן גבולי. שיטת Rothe מראה שהאיבר האינרציאלי הופך לאיבר בלתי גזור בעל מקדם הגדל ככל שצעד-הזמן קטן. פתרונות המתקבלים עבור צעדי-זמן הקטנים מצעד-זמן גבולי זה עלולים להיות בלתי-קבילים פיזיקלית במובן של הפרת עיקרון הסיבתיות. עבור הדוגמא הנומרית שהוצגה, צעד-הזמן הגבולי הינו קטן מצעד הזמן הגדול ביותר (איור 3א ואיור

4א) וגדול מצעד-הזמן האמצעי (איור 3ב ואיור 4ב) עבור השיטות שנבחנו.

במקרה זה השימוש בשיטות מיוצבות מאפשר קבלת פתרונות המקיימים את עיקרון הסיבתיות גם בצעדי-זמן קטנים. עבור אלמנטים לינאריים, ייצוב מרחבי זה מושג על-ידי שינוי פשוט של מערכי האלמנט ושינוי מתאים באיברי העמיסה לפני הרכבה. ייצוב מרחבי של האלגוריתמים לצעידה בזמן שומר על מבנה ותכונות האלגוריתמים המקוריים, ובפרט אלגוריתמים בעלי יציבות בלתי מותנית בזמן שומרים על תכונה זו גם בגירסתם המיוצבת. כמו-כן, תהליך האתחול אינו שונה מתהליך האתחול המקובל.

פתרונות הגירסה המיוצבת של כלל הטרפז למאמץ המתפתח במוט בזמן $t = 0.6\,L/c_o$ מוצגים באיור 5. ניתן לראות שאוסילציות לפני חזית הגל אינן קיימות בפתרון המיוצב, גם עבור צעדי-הזמן הקטנים מצעד-הזמן הגבולי, למרות שהן קיימות לאחר חזית הגל. הפתרון המיוצב של כלל הטרפז מקיים את עיקרון הסיבתיות בכל צעדי-הזמן, אך עדיין בולט לעין היעדר הריסון האלגוריתמי.

פתרונות הגירסה המיוצבת של שיטת generalized-α למאמץ המתפתח במוט בזמן $t = 0.6\,L/c_o$ מוצגים באיור 6. גם כאן אוסילציות לפני חזית הגל אינן קיימות בפתרון המיוצב, בכל צעדי הזמן. כמקודם, הפתרון המיוצב מקיים את עיקרון הסיבתיות בכל צעדי-הזמן, וכעת האוסילציות לאחר חזית הגל מרוסנות.

סיכום

בעזרת שיטת Rothe ניתן להגדיר צעד-זמן גבולי, המאפיין את ההתדרדרות ביציבות המרחבית, הבאה לידי ביטוי בהפרת עיקרון הסיבתיות. ייצוב מרחבי פשוט של שיטות סתומות מקובלות לאינטגרציה בזמן, מאפשר קבלת פתרונות המקיימים את עיקרון הסיבתיות גם בצעדי-זמן הקטנים מצעד-הזמן הגבולי. הפתרונות הטובים ביותר מתקבלים באמצעות שילוב של ייצוב מרחבי עם ריסון אלגוריתמי, דוגמת הקיים בגירסה המיוצבת של שיטת generalized-α.

מקור: [1] J. Chung, G.M. Hulbert, Trans. ASME J. Appl. Mech., 60: 371-375, 1993.

מהעיתונות 1

בגליון ספטמבר 2005 של העתון SIAM Review מצטט הנומריקאי John Strikwerda את דבריו של החוקר הישראלי פרופ' עמי הרתן ז"ל (שהיה מתימטיקאי באוניברסיטת ת"א) שאמר: "לאיש העוסק באנליזה נומרית יש שני סוגים של אמת; האמת שאתה מוכיח והאמת שאתה רואה כשאתה מחשב." Strikwerda מוסיף: "למזלנו שני סוגי אמת אלו בדרך כלל נמצאים בהסכמה. אבל לעיתים יש איזשהו הבדל ביניהם, איזשהו פער בין התיאוריה והתוצאות החישוביות." זהו אתגר חשוב ומעניין להסביר פערים כאלו.

מהעיתונות 2

בגליון הנ"ל מופיע גם מאמר של John Boyd, מתימטיקאי ידוע מהאוניברסיטה של מישיגן, על אסימפטוטיקה והקשר שלה לנומריקה, בהקשר של תופעות מרובות סקלות. להלן ציטוט, בתרגום חופשי לעברית, של קטע מהמאמר. הוא מתחיל בצורה "תמימה" אך מיד מגיע לאבחנה מעניינת הנוגעת למכניקה חישובית:

"אכן, הצורך לחקור טווח רחב של אמפליטודות וסקלות בנוי לתוך החושים שלנו: ראיה, שמיעה ומישוש. שני פיסיולוגים מהמאה ה-19 הבחינו במה שעתה נקרא חוק Weber-Fechner (WF): העוצמה של תחושה סובייקטיבית גדלה ביחס ישר ללוגריתם של עוצמת הגירוי. לדוגמה, העיניים שלנו מתפקדות גם באור כוכבים עמום וגם באור שמש של צהרי יום, שהוא פי מיליון יותר בהיר, אך אנו לא חשים בהבדל של פקטור של מיליון כי המוח שלנו מעביר את העוצמה לסקלה *לוגריתמית*. באותו אופן, העיניים שלנו (לפחות בצעירותנו) מסוגלות לשנות את מיקודן כדי לחוש גרגר חול מצד אחד ושרשרת הרים מצד שני.

חישוב מדעי מציית למעין חוק WF: לרוב סוגי התופעות, הגדילה במהירות בפקטור ביליון מהמחשב ENIAC (מהירות של מספר kilo-flops, כלומר אלפי פעולות בשניה) ששימש לחיזוי הנומרי הראשון של מזג-האויר ב-1950, למחשבי-העל של היום בעלי מהירות של מספר tera-flops, לא גרם לגדילה בפקטור ביליון (וחבל!) בהבנתנו את האטמוספירה, או תופעות מסובכות אחרות בעלות סקלות מרובות. במקום זאת, ניתן לטעון את הטענה הבאה.

משפט 2.1 (החוק הלוגריתמי של החישוב המדעי). תובנה חישובית לתופעות הטבע גדלה בצורה *לוגריתמית* עם מהירות החישוב וגודל הזכרון של המחשבים.

החוק הלוגריתמי של החישוב המדעי גורר שחישוב "עם הראש בקיר" (brute force) לא יפתור *לעולם* את כל הבעיות המעניינות של המדע. סימולציה נומרית ישירה (Direct Numerical Simulation – DNS) של טורבולנטיות תלת-מימדית במספרי ריינולדס מאד גבוהים דורשת מחשבי-על עם בליון מעבדים, תאי זכרון בגודל אטומי, וחיבורי תקשורת מהירים יותר ממהירות האור! אך תורת החבורות המנורמלות (renormalization group theory) – תורה אסימפטוטית השואלת רעיונות מתורת השדה הקוונטי – אינה כה מוגבלת. ישנן אסטרטגיות תחרותיות רבות עבור טורבולנטיות, כמה מהן מתגאות בקשר שלהן לאסימפטוטיקה וכמה מסוות קשר זה, אך כולן, לפחות באופן עקיף, משתמשות בחשיבה אסימפטוטית כדי לגשר על הפער שבין חישובים לבין העוצמה הטמונה בתופעות מרובות סקלות."

עד כאן הציטוט המתורגם ממאמרו של Boyd. יש להזהיר את הקוראים כי Boyd אינו איש חישובים אלא אנליטיקאי מובהק וגאה, ולכן יש לקחת את דבריו (ואת מידת האוביקטיביות שבהם) בזהירות... למשל, אם הוא רומז בקטע הנ"ל שאין שום טעם לבצע חישובי טורבולנטיות נומריים משום סוג שהוא הרי שיש רבים שלא יסכימו עימו. אולם, הנקודה המרכזית הטמונה בדבריו ראויה לתשומת לב. חישוב "עם הראש בקיר" אינו יכול להביא לתוספת משמעותית של תובנה. אסטרטגיה שהסתברה כטובה במקרים רבים היא לתקוף את הבעיה בצורה אנליטית תחילה, ללכת רחוק ככל הניתן עם ההבנה האנליטית, ולהשאיר לטיפול נומרי רק את "הגרעין הקשה" של הבעיה. פילוסופיה מעין זו אכן עומדת בבסיס של שיטות חדשות שהוצעו בשנים האחרונות לבעיות מרובות סקלות במכניקה חישובית.

חשוב להעיר גם כי בניגוד לרושם שיוצר הקטע של Boyd כאילו התקדמות החישוב המדעי היא בזכות התפתחות החומרה בלבד, להתפתחות התוכנה (שיטות חישוב יעילות) יש גם כן תרומה מכרעת – בערך באותו סדר גודל כמו תרומת החומרה.