עלון

אישח"מ

עלון האיגוד הישראלי לשיטות חישוביות במכניקה

מרץ 2008 מספר 19

עורך: דן גבעולי, הפקולטה להנדסת אוירונוטיקה וחלל, טכניון, חיפה 32000,
טל. 8293814 (04), פקס 8292030 (04), דואר אלקטרוני: givolid@aerodyne.technion.ac.il

אתר אישח"מ (IACMM) באינטרנט: http://www.iacmm.org.il
רישום לחברות באגוד ופרטים נוספים: באתר האגוד הנ"ל, או פנו למזכיר-גזבר,
ד"ר עמנואל אור, טל. 9908640 (04), פקס 9908164 (04), דואר אלקטרוני: emanuelo@rafael.co.il

---

הערות העורך:

נא שלחו לכתובת המערכת (בדואר אלקטרוני או רגיל) חומר לפרסום בעלון. ניתן ורצוי לצרף ציורים ותמונות. לידיעת חברות: ניתן גם לפרסם חומר מסחרי- פרסומי בתשלום. לפרטים נא לפנות למערכת.

חידוש רישום באגוד:

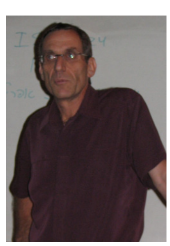
אנא הרשמו כחברים באגוד או חדשו את חברותכם! טופס רישום עם פרטים מלאים ניתן למצוא באתר
.http://www.iacmm.org.il/member

ISCM-23

יום העיון ה-23 התקיים ב-11.10.07 במכון ויצמן למדע. המארגנים המקומיים היו רמי בן-צבי ועינת אהרונוב.

יום העיון היה מוצלח מאד ונכחו בו מספר שיא של משתתפים. יום העיון נפתח בהרצאה המוזמנת המאלפת של פרופ' Spencer Sherwin מ- Imperial College בלונדון על סימולציה של זרימה במחזור הדם בעזרת מודלים רבי- סקאלות. ראו התמונות למעלה ומימין.

הרצאת מפתח נוספת ניתנה ע"י יוסף פלקוביץ על שיטת חוקי שימור GRP המשמשת לפתרון בעיות זרימה מסובכות. במסגרת יום העיון נאמרו מילים לזכרם של פרופ' משה ישראלי ז"ל (ע"י עירד יבנה) ופרופ' ליביו ליברסקו ז"ל (ע"י דורון שליו). להלן גלריה של תמונות של מרצים ביום העיון. בשורה העליונה, מימין לשמאל: ארז גל, עדי דיטקובסקי ויוסף פלקוביץ; בשורה התחתונה, מימין לשמאל: דורון שליו, Jiri Plesek וקוסטנטין וולוך.



ISCM-24
יום העיון ה-24 יתקיים ב-3.4.08 באוניברסיטת תל-אביב. ראו פרטים באתר האגודה על תוכנית הכנס, המבטיחה להיות מרתקת. המארגנים המקומיים הם אלכסנדר גלפגט וסלבה קרילוב. אנו מודים לאוניברסיטת ת״א, לפקולטה להנדסה ולביה״ס להנדסה מכנית על התמיכה הנדיבה.

מודלים חישוביים מרובי-סקאלות עבור חומרים ומבנים מרוכבים

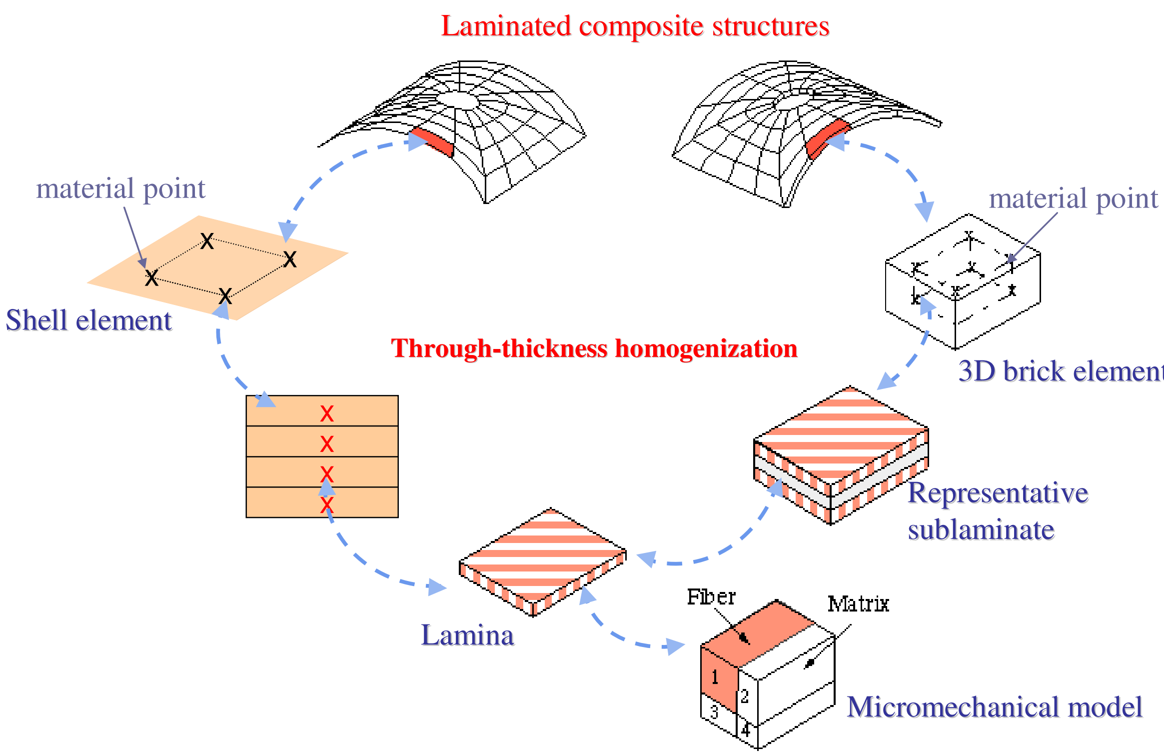
ראמי חג׳-עלי
ביה״ס להנדסה אזרחית,
Georgia Tech
rami.haj-ali@ce.gatech.edu

עיבד: דן גבעולי

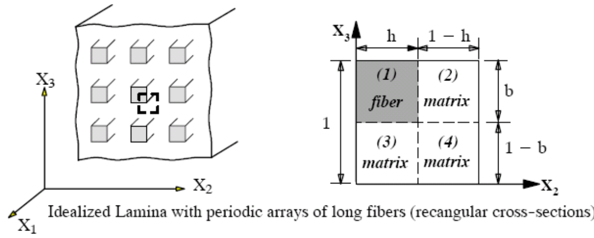
ההתפתחויות העצומות בטכנולוגיית המחשוב בשני העשורים האחרונים איפשרו פיתוח של כלים חישוביים המבצעים באופן רוטיני אנליזות לא-לינאריות לשימושים הנדסיים. אפליקציה חשובה היא התנהגות של מבנה מרוכב הכוללת תגובות מקומיות לא-לינאריות (עקב התנהגות לא אלסטית) ונזק. אולם, השימוש הישיר של מודלים מיקרו-מכניים באנליזה לא-לינארית של מבנים מלווחים דורשת פשרה בין דיוק לבין עומס חישובי, עקב המורכבות הרבה שלהם.

פשרה מסוג זה מוצעת במסגרת החישובית המתוארת באיור 1. זוהי מסגרת תלת-מימדית מיקרומכנית ומבנית עבור אנליזה לא-לינארית אלסטית וויסקו-אלסטית של חומר מרוכב מלווח, וכוללת גם ניתוח של התפשטות סדקים המבוססת על התיאוריה של ״סדק דביק״ (cohesive crack). כל שכבה חד-כוונית ממודלת ע״י מודל מיקרו-מכני המתקבל בשיטת התאים של עבודי (Method of Cells: MOC); ראה [1]. המסגרת כוללת גם מודל ליווח אפקטיבי המשמש לקבלת התגובה התלת-מימדית עבור רצפי שיכוב חוזרים, והממשק שלו עם תוכנית אלמנטים סופיים לא-לינארית המבוססת על תזוזות. כפי שאיור 1 מראה עבור מקרה של אלמנטי קליפה, כל שכבה ממודלת באופן מפורש בעזרת מספר נקודות אינטגרציה בתנאים של מאמץ מישורי, ומודל הליווח מבוסס במקרה זה על תורת הליווח הקלאסית.

המודל המיקרו-מכני מתואר באיור 2. החומר המרוכב החד-כיווני, המורכב מסיבים ארוכים המסודרים בכיוון אחד בתוך חומר מצע, מיוצג כמערך דו-מחזורי של סיבים עם חתך מלבני. בזכות הסימטריה, רק רבע מתא היחידה, המורכב מארבעה תת-תאים, ממודל. תת-תא אחד עשוי מחומר הסיב ושלושת האחרים עשויים מחומר המצע. הפורמולציה האינקרימנטלית של מודל ארבעת-התאים הקלאסי [1] שבאיור 2 מבוססת על המאמצים והעיבורים הממוצעים בתת-תאים. אלגוריתמים חדשים לעדכון ותיקון המאמצים פותחו על מנת להפחית בצורה משמעותית את העומס החישובי הנדרש. האלגוריתמים החדשים מנוסחים בהתבסס על קצב עיבור ממוצע קבוע לכל צעד זמן, דבר העושה אותם מתאימים לאינטגרציה במסגרת חישובית של אלמנטים סופיים.

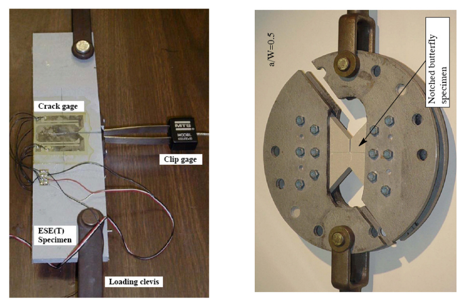


איור 1: מסגרת מיקרו-מכנית מבנית מרובת-סקאלות עבור אנליזה לא-לינארית של מבנים מרוכבים מלווחים.

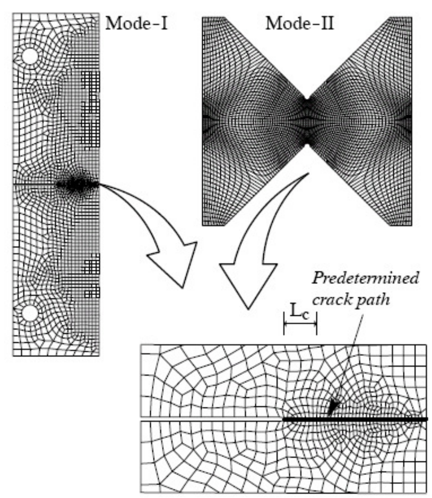


איור 2: תא-יחידה המשמש מודל מיקרו-מכני עבור חומר מרוכב משוריין בסיבים בכיוון אחד.

ניסויים ואנליזה חישובית נעשו בעזרת המסגרת החישובית מרובת-הסקלות המוצעת על מנת לקבוע את הקשיחות לשבר במוד I ו-II ואת התפשטות הסדק של דגמים מרוכבים עבי-דופן. איור 3 מראה את הדגמים ששימשו לניסוי: דגמים עם חריץ-קצה בודד ועומס אקסצנטרי (מתיחה) מסוג ESE(T) ודגמי פרפר מחורצים. איור 4 מראה מודלים חישוביים שעברו כיול ושימשו לחיזוי גדילת סדק במודים I ו-II בדגמים הנ"ל.

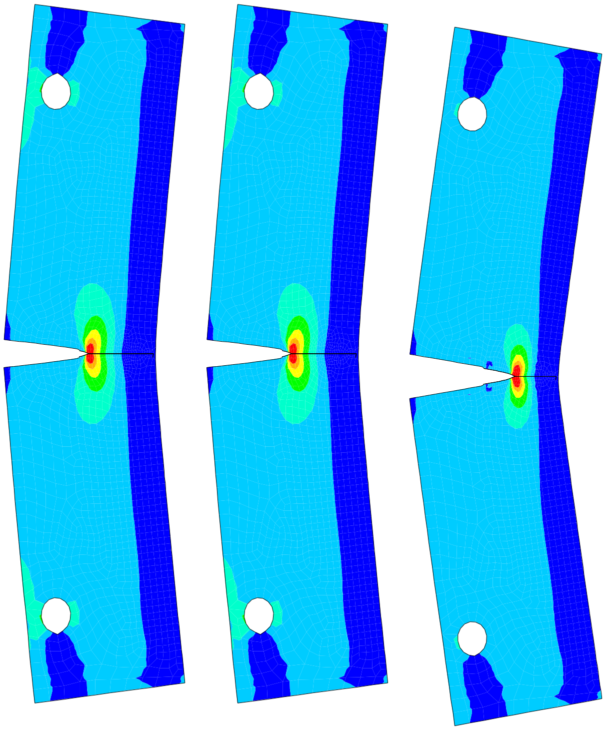


איור 3: דגמי ניסוי למדידת קשיחות לשבר והתנהגות של גדילת סדק.

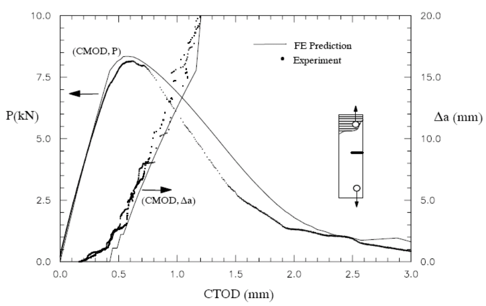


איור 4: מודל שבר של סדק עובר במבנה מרוכב עבה-דופן, המשמש לחיזוי הקשיחות לשבר והתנהגות של גדילת סדק בעזרת המסגרת החישובית המוצעת.

איור 5 מראה תוצאות של הסימולציה; נראים שלושה שלבים של גדילת הסדק, משמאל לימין. איור 6 מדגים את יכולת החיזוי של המסגרת החישובית בהשוואה לתוצאות הניסוי, בעזרת עקום העומס כנגד תזוזת הפתיחה של הסדק



איור 5: סימולציה של גדילת סדק (משמאל לימין) בדגם מרוכב ESE(T) בעזרת המסגרת החישובים מרובת-הסקאלות.



איור 6: גידול הסדק עבור חיזוק רוחבי של דגם מרוכב ESE(T) עם יחס מימדים של 0.3: השוואה של חיזוי וניסוי.

(Crack Opening Displacement – CTOD) ובעזרת עקום אורך הסדק כנגד ה-CTOD. ההשוואה מראה כי המסגרת החישובית מרובת-הסקאלות היא אפקטיבית בחיזוי עומס הכשל והתנהגות גדילת הסדק במבנים מרוכבים עבי-דופן.

פרטים נוספים על עבודה זו ניתן לקרוא במאמרים [2-4] ובמאמרים אחרים של המחבר.

מקורות

[1] Aboudi J (1991) Mechanics of Composite Materials - A Unified Micromechanical Approach. Elsevier.

[2] Haj-Ali RM and Muliana AH (2004) Numerical Finite Element Formulation of the Schapery Nonlinear Viscoelastic Material Model. Int. J. of Numerical Method in Engr, 59(1), pp. 25-45

[3] Haj-Ali R and Muliana A (2004) A Multi-scale Constitutive Framework for the Nonlinear Analysis of

Laminated Composite Materials and Structures. Int. J. Solids and Structures, 41 (13), pp. 3461-3490

[4] Haj-Ali, R., (2008), Nested Nonlinear Multi-scale Frameworks for the Analysis of Thick-Section Composite Materials and Structures, in Multiscale Modeling and Simulation of Composite Materials and Structures, Eds. Kwon, Y. W., Allen, D.H., and Talreja, R., Springer Pub., ISBN 978-0-387-36318-938, pp. 332-371

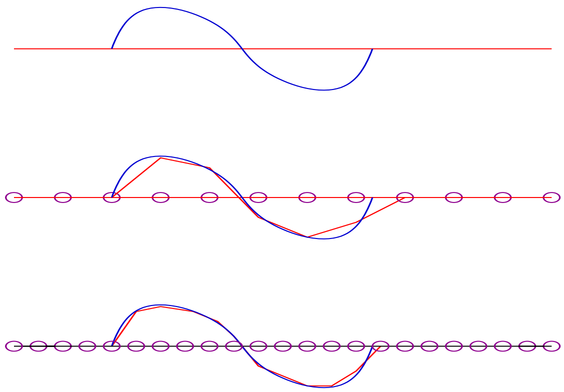
פינת השגיאה הקטנה

בגליון מס' 14 דנו ב**שגיאת המודל המתמטי**, בגליון 16 ב**שגיאת הדיסקרטיזציה**, בגליון 17 ב**שגיאת העיגול**, בגליון 18 ב**שגיאת ייצוג הנתונים**, ובגליון זה נדון בסוג מיוחד של שגיאות הנקראות **שגיאות זיהום**.

לשמחתנו, שגיאות דיסקרטיזציה בדרך כלל מתאפיינות ב"מקומיות" כלומר משפיעות רק על סביבן הקרובה. לדוגמה, אם לא נזהרנו והרשת בה השתמשנו למודל אלמנטים סופיים של הולכת חום אינה מספיק עדינה באיזור קטן מסויים בתחום החישובי, יתפתחו באיזור זה שגיאות גדולות, אולם בד"כ הן יורגשו רק בקרבת איזור זה ולא הרחק ממנו. עובדה זו משמחת מכמה סיבות. ראשית, פרוש הדבר הוא שהתוצאות הנומריות שנקבל קבילות בשאר איזורי התחום. ללא תכונת המקומיות של השגיאה, עידון לא מספיק באיזור קטן מסויים היה גורם לכך שהתוצאות של המודל כולו תהיינה שגויות. שנית, המקומיות של השגיאה מאפשרת לנו לקבל בקלות יחסית הערכה על גודל השגיאה מתוך התוצאות הנומריות עצמן (מה שמכונה הערכת שגיאה א-פוסטריורית), וגם לבצע שינוי מקומי אדפטיבי של הרשת על מנת להגיע לדיוק הרצוי. למשל, אם על פי הפתרון הנומרי שקיבלנו לבעיית מעבר חום עם רשת אחידה ישנו גרדיאנט גבוה בטמפרטורה באיזור מסויים ברשת יחסית לאיזורים אחרים, כדאי לעדן את הרשת באיזור זה (ובו בלבד).

אולם, במקרים מיוחדים מתפתחת שגיאה *שאינה* בעלת תכונת מקומיות. שגיאה כזו נקראת שגיאת זיהום (pollution error). במקרה כזה השגיאה משפיעה על איזור נרחב בתחום החישובי או על התחום כולו, ולכן "מזהמת" את הפתרון החישובי. עידון מקומי בד"כ לא ירפא את הקושי.

נזכיר כאן שתי דוגמאות חשובות לשגיאות זיהום בהקשר של שיטת האלמנטים הסופיים. הדוגמה הראשונה קשורה *לבעיות גלים*. נתאר לעצמנו גל בעל "אורך-גל" מסויים, המופיע בפתרון בעיה כלשהי (ויהי זה גל אקוסטי, או גל אלסטי או גל אלקטרומגנטי או כל גל אחר). נניח כי למרות שאין אנו יודעים מראש את הפתרון, אנו יכולים להעריך את אורך-הגל האופייני של הבעיה. על מנת לקבל רזולוציה טובה של הפתרון יש להשתמש במספר מספיק של אלמנטים לאורך הגל. "כלל אצבע" ידוע טוען כי יש צורך לפחות ב-10 אלמנטים לאורך גל עבור רזולוציה סבירה. מבחינה אינטואיטיבית כלל זה נראה הגיוני; ראו למשל את האיור משמאל. אנו מסתכלים על גל המוגדר לאורך תחום חד-מימדי. אנו מחלקים את התחום לאלמנטים לינאריים. הצמתים שבין האלמנטים מסומנים באיור. כאשר אנו מרשתים כך שאיזור הגל מחולק לכחמישה אלמנטים (החלק המרכזי של האיור) הייצוג של הגל הוא גס ביותר, בעוד שחלוקת הגל לכעשרה אלמנטים (החלק התחתון של האיור) נותן ייצוג שנראה טוב מאד.



אולם ניתן להראות שבשיטת האלמנטים הסופיים הסטנדרטית, "כלל האצבע" של 10 אלמנטים לאורך גל מוביל לפתרונות סבירים רק עבור גלים ארוכים מספיק. עבור גלים קצרים (בהשוואה לגודל התחום החישובי), גם רזולוציה של 10 אלמנטים לאורך גל תוביל לשגיאות גדולות, ושגיאות אלו לא יהיו מקומיות אלא יזהמו את התחום החישובי כולו. שגיאות זיהום מעין אלו הן שגיאות דיספרסיה; המודל הנומרי אינו מייצג נכון את "יחס הדיספרסיה" שהוא המשוואה הבסיסית השולטת בהתנהגות גלים מסוג מסויים והמקשרת בין אורך הגל ומהירותו. יתר על כן, אם ננסה לשנות את "כלל האצבע" כך שבמקום 10 אלמנטים לאורך גל יידרשו 20 אלמנטים לאורך גל (או כל מספר קבוע אחר שנבחר), ניווכח שהקושי לא יפתר. הרזולוציה הנדרשת לקבלת דיוק טוב תלויה באורכי הגלים המשתתפים בפתרון ואינה גודל קבוע!

ניתן להסביר את "איבוד המקומיות" הנ"ל בצורה הבאה. אם נתמקד במחזור בודד של גל (סינוס שלם אחד), מודל האלמנטים הסופיים יחזה אותו עם שגיאת פאזה מסויימת. כלומר הגל המקורב יהיה מתוח או מכווץ או מוזז במקצת יחסית לגל האמיתי. זוהי שגיאה מקומית, ואם נשתמש במספר מספיק של אלמנטים לאורך הגל (למשל 10), שגיאת הפאזה הזו תהיה קטנה. אולם כאשר הגלים בפתרון כוללים מחזורים רבים (או כאשר הגל נע על פני התחום) שגיאה זו *מצטברת* לשגיאת זיהום גדולה שאינה מקומית.

מספר תרופות הוצעו לקושי זה. התרופה הבדוקה ביותר כיום היא העשרת מרחב פונקציות הצורה הסטנדרטי של האלמנטים הסופיים כך שיכלול "פונקציות גלים" מיוחדות. בנוכחות פונקציות הגלים האלו שגיאות הזיהום כמעט נעלמות, והקשר שבין צפיפות הרשת והשינויים המקומיים בפתרון חוזר להיות הקשר האינטואיטיבי שלו אנו מצפים.

דוגמה שניה לשגיאות זיהום היא נוכחות של *סינגולריות* בפתרון המדויק של הבעיה. למשל, ידוע שכאשר התחום החישובי כולל בתוכו סדק, הפתרון סביב קצה הסדק הוא סינגולרי (המאמצים שואפים לערך אינסופי). ניתן להראות שהשגיאות הנובעות מחוסר טיפול נאות בסינגולריות גם הן שגיאות זיהום באופיין. גם כאן תרופה בדוקה היא העשרת מרחב פונקציות הצורה הסטנדרטי של האלמנטים הסופיים כך שיכלול "פונקציות קצה-סדק" מיוחדות.

חוקר שהיתה לו תרומה מכרעת להעלאת שגיאות זיהום למודעות וניתוחן הוא Ivo Babuska (בתמונה). ביחד עם חוקרים שותפים הוא פרסם בשנים האחרונות מאמרים רבים בנושא, שניתן למצאם בכתבי העת העוסקים במכניקה חישובית.