עלון
אישח"מ

עלון האיגוד הישראלי לשיטות חישוביות במכניקה

מרץ 2009 מספר 21

עורך: דן גבעולי, הפקולטה להנדסת אוירונוטיקה וחלל, טכניון, חיפה 32000,
טל. 8293814 (04), פקס 8292030 (04), דואר אלקטרוני: givolid@aerodyne.technion.ac.il
חברי ועד אישח"מ: עמנואל אור (מזכיר-גזבר), מיכאל אנגלמן, פנחס בר-יוסף, דן גבעולי (נשיא),
יצחק הררי, עמיאל הרשאגה, יונתן טל (אחראי האתר), זהר יוסיבאש
איש-קשר עם ECCOMAS: מישל ברקוביי
ועדת ביקורת: משה איזנברגר ושמואל קידר
אתר אישח"מ (IACMM) באינטרנט: http://www.iacmm.org.il
רישום לחברות באגוד ופרטים נוספים: באתר האגוד הנ"ל, או פנו למזכיר-גזבר,
ד"ר עמנואל אור, טל. 9908640 (04), פקס 9908164 (04), דואר אלקטרוני: emanuelo@rafael.co.il

---

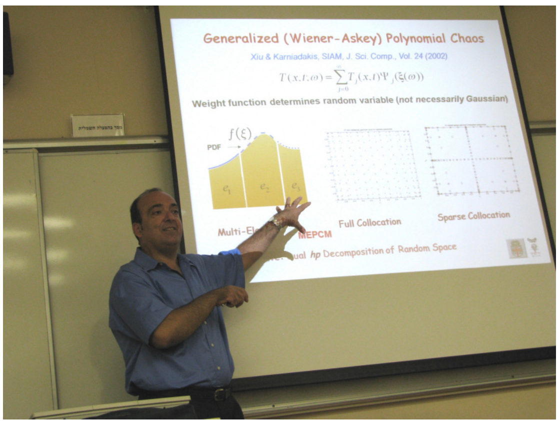
הערות העורך:

נא שלחו לכתובת המערכת (בדואר אלקטרוני או רגיל) חומר לפרסום בעלון. ניתן ורצוי לצרף ציורים ותמונות. לידיעת חברות: ניתן גם לפרסם חומר מסחרי- פרסומי בתשלום. לפרטים נא לפנות למערכת.

אנא בקרו באתר האגוד http://www.iacmm.org.il, ותמצאו מידע רב על האיגוד ועל מכניקה חישובית בארץ ובעולם. באתר תוכלו לצרף עצמכם (ללא תשלום) לרשימת התפוצה האלקטרונית. באתר תוכלו גם להרשם כחברים באגוד או לחדש את חברותכם. טופס רישום עם פרטים מלאים ניתן למצוא ב- http://www.iacmm.org.il/member.

ISCM-25

יום העיון ה-25 התקיים ב-23.10.08 באוניברסיטת בן-גוריון בנגב והיה מוצלח מאד. המארגנים המקומיים היו זהר יוסיבאש וארז גל. הרצאת הפתיחה המעניינת ניתנה ע"י פרופ' George Em Karniadakis מאוניברסיטת Brown בארה"ב, על אי-ודאות בסימולציות גדולות. ראו תמונה משמאל. ההרצאות האחרות ביום העיון הוצגו במסגרת תחרות הרצאות שתכלול גם את יום העיון הבא. אנו מודים לאוניברסיטת בן-גוריון, לפקולטה להנדסה ולרקטור האוניברסיטה על התמיכה הנדיבה. במסגרת האסיפה הכללית הוענקו לד"ר נטע עומר תעודה על תיזת הדוקטורט שלה שייצגה את אישח"מ בתחרות התיזות של הארגון האירופי ECCOMAS. בתמונה שבראש העמוד הבא: עמנואל אור (מימין, מזכיר-גזבר) ודן גבעולי (נשיא) מעניקים לנטע עומר את התעודה.



ISCM-26

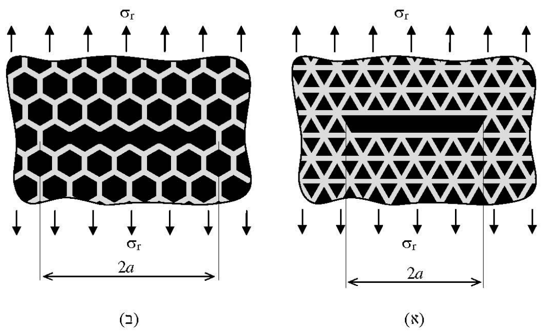
יום העיון ה-26 יתקיים ב-23.4.09 בטכניון. ראו פרטים באתר האגודה על תוכנית הכנס, המבטיחה להיות מרתקת. המארגנים המקומיים הם קוסטה וולוך ועודד רבינוביץ. אנו מודים לטכניון על התמיכה הנדיבה ולפקולטה להנדסה אזרחית וסביבתית על אירוח יום העיון.

תיכנון חומרים בעלי צפיפות נמוכה לעמידות בפני התקדמות סדקים

פביאן ליפרמן
המח׳ למכניקה, חומרים ומערכות
הפקולטה להנדסה, אוניברסיטת ת״א
fabian@eng.tau.ac.il

מבוא

חומר סלולרי הינו חומר מרוכב עם פאזה אחת של אוויר ופאזה שניה מוצקה. אחד המאפיינים העיקרים שלו הינו צפיפותו היחסית הנמוכה כאשר צפיפות יחסית מוגדרת כיחס בין צפיפות החומר כולו ובין צפיפות המוצק המהוה את הפאזה השניה. המבנה המיוחד שלו מאפשר למדל חומר סלולרי על ידי מבנים מחזוריים ואינסופיים בהם הקירות המוצקים מיוצגים על ידי קורות אלסטיות של ברנולי-אוילר. בעבודה זו נלקחו בחשבון שתיים מבין הטופולוגיות הנפוצות ביותר של החומרים הסלולרים הדו-ממדיים (חלות הדבש) המורכבים מתא מחזורי של משולש שווה צלעות וממשושה משוכלל (ראו איור 1).



איור 1: (א) מבנה המשולשים (ב) ומבנה המשושים המועמסים במאמץ מתיחה חד-צירי באינסוף σ_r ועם סדקים באורך 2a

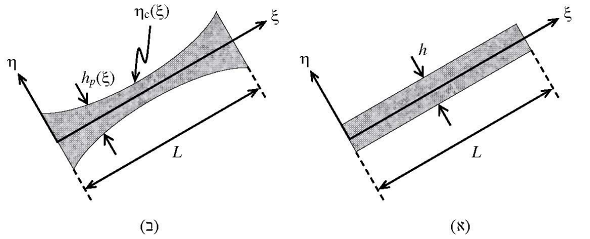
בניגוד לחומר רציף עבורו תמיד נדרש ניסוי על מנת לקבוע את מקדם חסינות השבר של החומר, בחומר סלולרי, כיוון שסדק תמיד מסתיים לפני חור, שדה המאמץ בקצה הסדק הוא סופי ועל כן, אם ידוע המאמץ לכשל של מוצק הקירות ניתן באמצעות אנליזת מבנים לקבוע את מקדם חסינות השבר K_{IC}:

$$K_{IC} = \sigma_r \sqrt{\pi a} \tag{1}$$

כאשר σ_r הינו מאמץ המתיחה החד-צירי באיסוף ו- a הינו מחצית האורך של סדק מפותח. ישנן בספרות מספר עבודות בהן נקבע מקדם חסינות השבר של מספר טופולוגיות על ידי שימוש בכלים נומריים (שיטת אלמנט סופי) או בצורה מקורבת על ידי שימוש בכלים אנליטיים ותחת הנחות מסוימות. בעבודה זו נעשה שימוש בשיטה מדויקת לאנליזה של מבנה מחזורי ואינסופי עם אלמנטים חסרים המייצגים את הסדק (ראו [1]), המאפשר לא רק לקבוע את מקדם חסינות השבר, אלא גם לתכנן, על ידי פתרון בעיות אופטימיזציה, חומרים בעלי עמידות גבוהה יותר בפני התקדמות סדקים; כלומר, לתכנן חומרים בעלי מקדם חסינות שבר אופטימאליים. האנליזה מתבססת בעיקרה על שיטת התא המייצג [2] המשתמשת בהתמרת פורייה הבדידה. שילובה עם שיטות נוספות באנליזת מבנים [3-4] מאפשר לקבל את הפתרון של המבנה האינסופי עם סדק על סמך פתרונות של תא מחזורי אחד בלבד.

תכנון חמרים בעלי מקדם חסינות שבר אופטימאליים

שתי בעיות אופטימיזציה נלקחו בחשבון להגדלת העמידות בפני התקדמות סדקים כאשר החומר נתון למאמץ מתיחה חד צירי באינסוף, כפי שמוראה באיור 1. במקרה הראשון מניחים תא מחזורי עם קורות בעלות שטח חתך מלבני (ראו איור 2א) השונה מקורה לקורה. במקרה השני התא המחזורי מורכב מקורות זהות אך בעלות חתך משתנה המיוצג על ידי פונקציית פולינום המתארת את גובה החתך לאורך המפתח של הקורה (ראו איור 2ב).



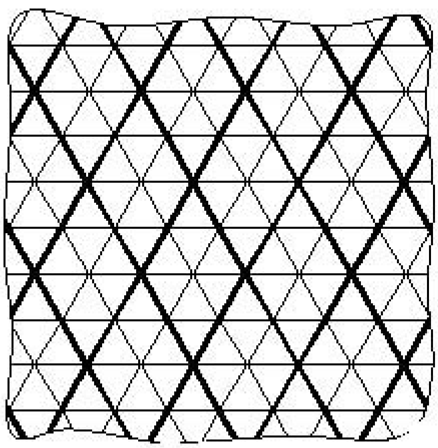
איור 2: (א) אלמנט עם שטח חתך אחיד (ב) ועם שטח חתך משתנה

משתני התכן בבעיה זו הם המקדמים של הפולינום. המטרה בשני המקרים הינה להגדיל את מקדם חסינות השבר (1) של המבנה. הסדק מתקדם כאשר אלמנט בקצה הסדק נכשל וזה קורה כתוצאה ממאמץ המתיחה צירי קריטי או כתוצאה מקריסה אלסטית של האלמנט. בניגוד לחומר רציף, בחומר סלולרי מספר הסדקים (המתקדמים בקו ישר) הינו סופי (3 במשולשים ו- 9 במשושים.) להגדלת העמידות בפני התקדמות סדקים יש לוודא שאף סדק לא מתקדם ולכן יש להניח בבעיית האופטימיזציה את ההימצאות של כולם, תחת ההנחה שכל אחד מספיק רחוק מהשני כך שאין ביניהם אינטראקציה. בנוסף צריך לקחת בחשבון שכל סדק יכול להסתיים לפני אלמנט אחר בתא המחזורי. תיאור מורחב של בעיות האופטימיזציה הנ״ל ניתן למצוא ב- [5].

תוצאות ומסקנות

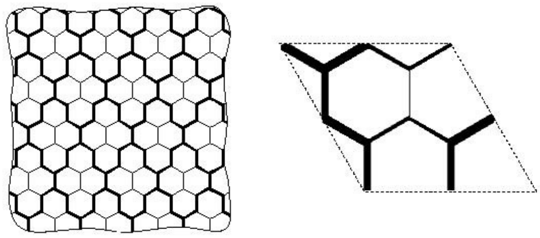
העיקרון המנחה בפתרון בעיית האופטימיזציה שבמקרה הראשון הינו לחזק חלק מהאלמנטים בתא המחזורי על חשבון החלשתם של האחרים. על ידי כך נאפשר לסדק להתקדם במקומות מסוימים אך במטרה להובילו אל ״מלכודות״ בהם יעצר מול האלמנטים החזקים. במקרה זה חשוב להפעיל שיקול דעת ׳הנדסי׳ בעת בחירת הסדקים שילקחו בחשבון לפתרון הבעיה. במקרה של מבנה המשולשים עם תא מחזורי בסיסי (3 אלמנטים) כאשר הצפיפות היחסית הינה 0.15 מתקבל מבנה אופטימאלי בעל מקדם חסינות שבר הגדול ב- 20% מזה של המבנה עם אלמנטים זהים. תוצאה זו ניתנת לשיפור על ידי בחירת תא מחזורי הכולל 4 תאים בסיסים. במצב זה גדל מספר משתני

התכן ל- 12 ומתקבל מבנה עם מקדם חסינות שבר הגדול ב- 45% מזה של המבנה המקורי (ראו איור 3.) מבנה



איור 3: מבנה המשולשים האופטימאלי עם תא מחזורי בעל 12 אלמנטים

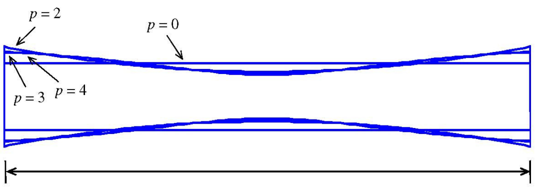
זה שואף לפתרון האופטימאלי שהתקבל עם התא הבסיסי אך כאן האלמנטים הדקים אינם נעלמים בגלל האילוץ לכשל בקריסה של האלמנטים. במקרה של מבנה המשושים עם תא מחזורי בסיסי מתקבל שיפור זעום של 6%. הסיבה לכך היא ריבוי הסדקים האפשריים בטופולוגיה זו. כאשר תא מורחב עם 12 אלמנטים נלקח בחשבון מתקבל שיפור של 18%. בניגוד למבנה המשולשים, טופולוגיית המשושים אינה מאפשרת לקבל עם התא המוגדל את הפתרון של המבנה עם תא הבסיסי. טופולוגיית המבנה האופטימאלית עבור צפיפות יחסית 0.15 מתוארת באיור 4.



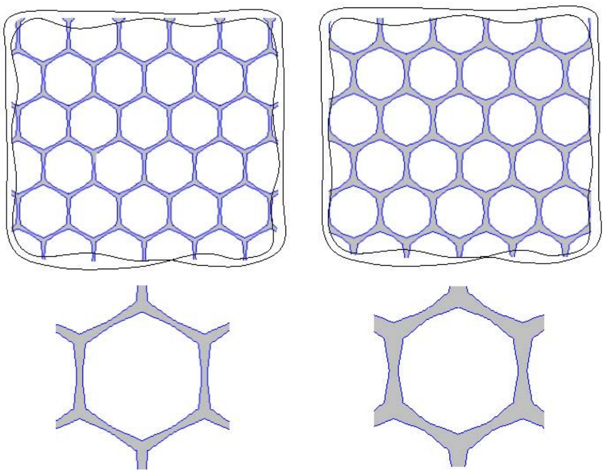
(א) (ב)

איור 4: (א) מבנה המשושים (ב) והתא האופטימאלי המתקבל עם 12 אלמנטים במחזור

בניגוד למקרה הראשון פתרון בעיית האופטימיזציה של אלמנטים עם חתך משתנה מניב פחות מ- 5% שיפור במקדם חסינות השבר במבנה המשולשים. מבנה זה הינו בעל מוד צירי (בעיקרו נשלט על ידי כוחות ציריים) ועל כן לאלמנט האופטימאלי חתך כמעט אחיד לאורך כל מפתחו. מנגד, מבנה המשושים נשלט על ידי מוד הכפיפה ועל כן מניב שיפור משמעותי יותר. במקרה זה, עבור צפיפות יחסית 0.15 מתקבל שיפור של כ- 100% במקדם חסינות השבר. חתך האלמנט האופטימאלי המתקבל עבור פולינומים מסדר p שונים מתואר באיור 5. טופולוגיית המבנה האופטימאלי עם פונקציית פולינום מסדר רביעי עבור צפיפות יחסית 0.15 ו- 0.25 מתוארת באיור 6. מסתבר שעל מנת לשפר את העמידות בפני התקדמות סדקים במבנה הנשלט על ידי מוד הכפיפה רצוי להשתמש בגישה בה אלמנטי התא הינם זהים אך בעלי חתך משתנה, בעוד שבמבנה בו המוד הצירי שולט מומלץ לעבוד לפי הגישה בה חתך האלמנט הוא אחיד אך משתנה בין אלמנטי התא.

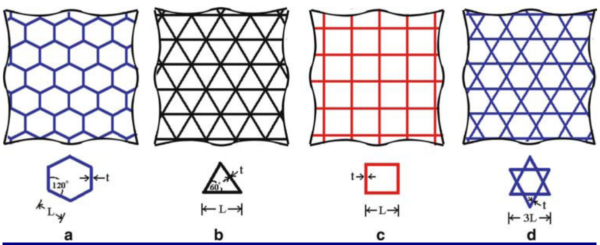


איור 5: האלמנט האופטימאלי במבנה המשושים עם צפיפות יחסית 0.15 עבור פונקציות פולינום מסדר p



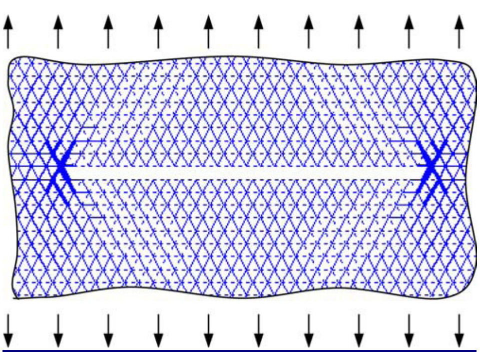
איור 6: טופולוגיית המשושים האופטימאלית עם אלמנט בעל פונקציית חתך המתוארת על ידי פולינום מסדר 4 עבור צפיפות יחסית (א) 0.15 ו- (ב) 0.25

איור 7 מראה טופולוגיות דו-מימדיות מחזוריות שונות בהן ניתן לטפל בשיטה המוצעת (ראו [6]), ואת התאים הבסיסיים המגדירים אותן.

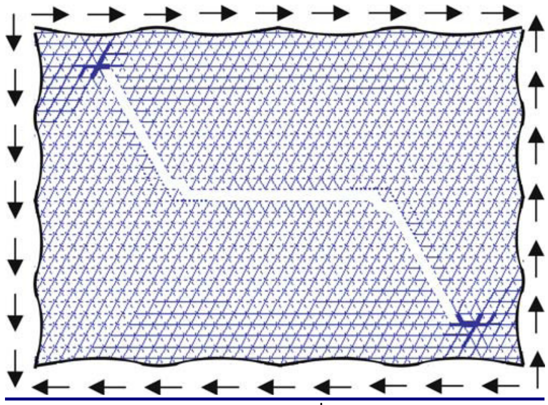


איור 7: ארבע טופולוגיות דו-מימדיות מחזוריות.

איורים 8 ו-9 מראים תוצאות של סימולציה עבור סדק ברשת בעלת תאים משולשים תחת עומס מתיחה חד-צירי ועומס גזירה, בהתאמה.

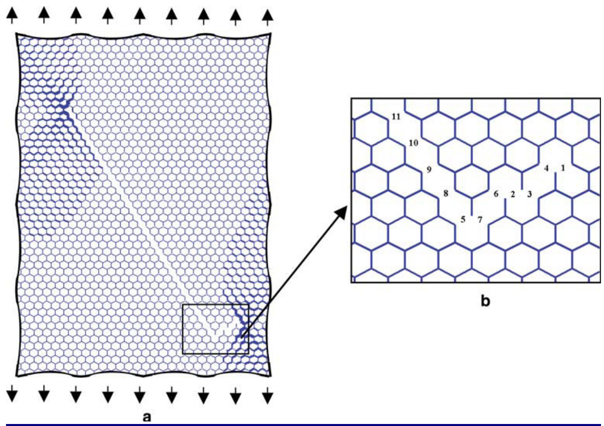


איור 8: סדק ברשת משולשים תחת עומס מתיחה חד-צירי



איור 9: סדק ברשת משולשים תחת עומס גזירה

איור 10a מראה סדק שהתפתח ברשת של משושים עקב מתיחה חד-צירית. איור 10b מראה את סדר ההתפתחות שלו.



איור 10: (a) סדק ברשת משושים תחת מתיחה חד-צירית, (b) סדר ההתהוות (nucleation) של הסדק.

ראו מאמרים [1], [4]-[6] לפרטים נוספים ואפליקציות שונות.

מקורות

[1] Lipperman, F., Ryvkin, M., and Fuchs, M.B. Fracture toughness of two-dimensional cellular material with periodic microstructure, International Journal of Fracture, 146: 179-190, 2007.

[2] Nuller, B. and Ryvkin, M. On boundary value problems for elastic domains of a periodic structure deformed by arbitrary loads, Proc. of the State Hydraulic Institute, Energia, Leningrad, 136: 49-55, 1980 (in Russian).

[3] Majid, K.I., Saka, M.P. and Celik, T. The theorems of structural variation generalized for rigidly jointed frames, Proc. Inst. Civ. Engrs., 51(2): 839-856, 1978.

[4] Lipperman, F., Fuchs, M.B. and Ryvkin, M. Stress localization and strength optimization of frame material with periodic microstructure, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 197: 4016-4026, 2008.

[5] Lipperman, F., Ryvkin, M. and Fuchs, M.B. Design of crack resistant two-dimensional periodic cellular materials, Journal of Mechanics of Materials and Structures (submitted).

[6] Lipperman, F., Ryvkin, M. and Fuchs, M.B. Nucleation of cracks in two-dimensional periodic cellular materials, Comput. Mech., 39: 127–139, 2007.

פינת השגיאה הקטנה

בגליון מס' 14 דנו ב**שגיאת המודל המתימטי**, בגליון 16 ב**שגיאת הדיסקרטיזציה**, בגליון 17 ב**שגיאת העיגול**, בגליון 18 ב**שגיאת ייצוג הנתונים**, בגליון 19 ב**שגיאות זיהום** ובגליון 20 ב**שגיאת שפת-קיטוע** של תחום אינסופי. בגליון זה נדון בקצרה ב**שגיאת "ריכוז מסות"** (mass lumping) באנליזת אלמנטים-סופיים דינמית.

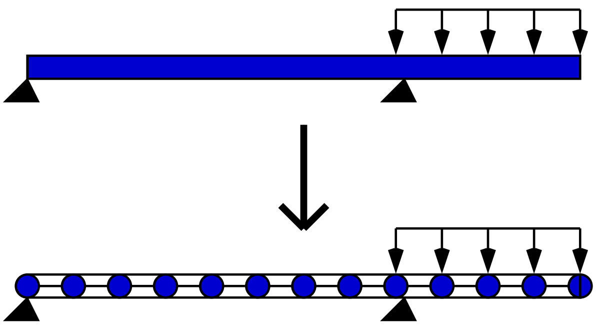
בשיטת האלמנטים הסופיים, כאשר פותרים בעייה דינמית (תלויית-זמן) מקובל לבצע תחילה דיסקרטיזציה במרחב (בעזרת אלמנטים סופיים) ולקבל את "הבעיה החצי-דיסקרטית". למשל בבעיות גלים לינאריות, מקבלים את המערכת הדינמית הבאה:

$$\mathbf{M}\mathbf{d}_{tt}(t) + \mathbf{K}\mathbf{d}(t) = \mathbf{F}(t) \,.$$

המטריצה $\mathbf{M}$ נקראת "מטריצת המסה" והיא תהיה חשובה להמשך ההסבר. לאחר קבלת המערכת הנ"ל מפעילים עליה שיטת צעידה בזמן (המבוססת על הפרשים סופיים) לקבלת הפתרון $\mathbf{d}(t)$. יש שני סוגים עיקריים של שיטות צעידה בזמן: סתומות (implicit) ומפורשות (explicit). שיטות סתומות מצריכות לפתור מערכת אלגברית של משוואות, בעוד ששיטות מפורשות מאפשרות לצעד בזמן ללא כל צורך בפתרון מערכת משוואות. יש לשיטות מפורשות חסרונות מסויימים שלא נזכיר כאן, אך במקרים רבים מעדיפים להשתמש בשיטה מפורשת.

אולם, על מנת שהשיטה תהיה באמת מפורשת, מטריצת המסה $\mathbf{M}$ חייבת להיות אלכסונית. לרוע המזל, המטריצה $\mathbf{M}$ המתקבלת בצורה עקבית בשיטת האלמנטים הסופיים אינה אלכסונית. התחכמו "זקני האלמנטים הסופיים" ואמרו: אם $\mathbf{M}$ אינה אלכסונית, נעשה אותה אלכסונית בכוח. שימו לב: אין מדובר כאן על לכסון המטריצה בשיטות המקובלות באלגברה לינארית אלא בהחלפה ישירה של $\mathbf{M}$ במטריצה אחרת, אלכסונית. כמובן שהחלפה זו מוצדקת רק אם השגיאה שהיא יוצרת היא קטנה.

התהליך נקרא "ריכוז מסות", וניתן להסתכל עליו גם בצורה פיסיקלית. באיור מתוארת בעיית כפיפה של קורה. המסה של הקורה מפולגת לאורכה ומיוצגת ע"י הרצף הכחול. מטריצת המסה $\mathbf{M}$ עבור קורה זו תהיה מלכתחילה בלתי אלכסונית. תהליך "ריכוז מסות" משמעו החלפת הקורה בקורה שבה המסות מרוכזות בנקודות דיסקרטיות (הצמתים), כמתואר באיור. המטריצה $\mathbf{M}$ עבור קורה זו תהיה אלכסונית.



ריכוז מסות הוא תהליך "ברוטלי" ואד-הוק בטבעו, ולכן יש להזהר מאד בהפעלתו. ישנן דרכים שונות לביצוע ריכוז מסות, ולהן יתרונות וחסרונות יחסיים. ניתן להראות שבמקרים רבים השגיאה שיוצר ריכוז-מסות היא באותו סדר גודל כמו שגיאת הדיסקרטיזציה של האלמנטים הסופיים, ולפיכך "מוצדקת".