

עלון

אישיחה"מ

עלון האיגוד הישראלי לשיטות חישוביות במכניקה

מספר 22

ספטמבר 2009

עורך: דן גבעולי, הפקולטה להנדסת אוירונאוטיקה וחלל, טכניון, חיפה 32000, טל. 8293814 (04), פקס 8292030 (04), דואר אלקטרוני: givolid@aerodyne.technion.ac.il
חברי ועד אישח"מ: עמנואל אור, מיכאל אנגלמן, פנחס בר-יוסף, דן גבעולי (נשיא), יצחק הררי, עמיאל הרשגה (מזכיר-גזבר), יונתן טל (אחראי האתר), זהר יוסיבאש
איש-קשר עם ECCOMAS: מישל ברקובייר
ועדת ביקורת: משה איזנברגר ושמואל קידר
אתר אישח"מ (IACMM) באינטרנט: <http://www.iacmm.org.il>
רישום לחברות באגוד ופרטים נוספים: באתר האגוד הנ"ל, או פנו למזכיר-גזבר, ד"ר עמיאל הרשגה, טל. 8183709 (04), פקס 8183723 (04), דואר אלקטרוני: amiel@iec.co.il

הערות העורך:

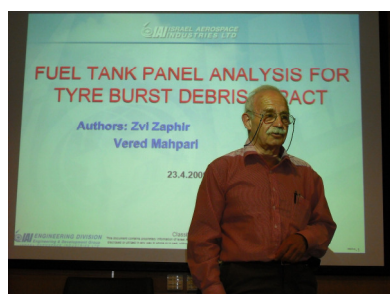
נא שלחו לכתובת המערכת (בדואר אלקטרוני או רגיל) חומר לפרסום בעלון. ניתן ורצוי לצרף ציורים ותמונות. לידיעת חברות: ניתן גם לפרסם חומר מסחרי- פרסומי בתשלום. לפרטים נא לפנות למערכת.

אנא בקרו באתר האגוד <http://www.iacmm.org.il>, ותמצאו מידע רב על האיגוד ועל מכניקה חישובית בארץ ובעולם. באתר תוכלו לצרף עצמכם (ללא תשלום) לרשימת התפוצה האלקטרונית. באתר תוכלו גם להרשם כחברים באגוד או לחדש את חברותכם. טופס רישום עם פרטים מלאים ניתן למצוא ב- <http://www.iacmm.org.il/member>

ISCM-26

יום העיון ה-26 התקיים ב-23.4.09 בטכניון, והיה מוצלח ביותר. אנו מודים לטכניון על התמיכה הנדיבה, לפקולטה להנדסה אזרחית וסביבתית על אירוח יום העיון, ולמארגנים המקומיים קוסטה וולון ועודד רבינוביץ על הארגון המושלם.

בתמונות, מהפינה השמאלית העליונה ובכיוון השעון: אדריס תיתי ממכון ויצמן נותן הרצאת מפתח, Christos Xenophontos מקפריסין (משמאל), אדריס תיתי ו-Patrick Le Tallec מצרפת, צבי צפיר בהרצאה, Patrick Le Tallec נותן את הרצאת הפתיחה המוזמנת.



נכון להיום, הדיאגנוזה מסתמכת על בדיקת צפיפות העצם
(BMD) ברמת המאקרו. שיטות אלו מספקות מידע לגבי
המבנה ברמה מאקרו ולכן לא מתאימות להערכת מצב
ברמת המיקרו ומתעלמות מארכיטקטורת המיקרו-התלת-
ממדית מורכבת של העצם.

טכנולוגיות הדמיה רפואית הקיימות כיום, המבוססות על
טכנולוגיות CT ו- MRI, מאפשרות סריקת עצמות בתוך
הגוף ושל ביופסיות ברזולוציה גבוהה ($5-90 \mu m$).
האנליזה המכאנית של מודלים תלת-ממדיים המשוחררים
מתוך התמונות, מבוססת על שיטה ידועה בשם מיקרו
אלמנטים סופיים (Micro Finite Elements), אשר פותחה
במהלך שנות התשעים [1]. השיטה אינה מאפשרת אנליזה
מבנה העצם במספר סקאלות מהסיבות הבאות: (א)
הסבוכיות החישובית הגבוהה של השיטה מאפשרת אנליזה
של מודלים קטנים בלבד תוך שימוש במשאבי חישוב
רגילים; (ב) המעבר בין מודל המאקרו למודל המיקרו דורש
פתרון מחדש של המודל ברמת המיקרו; (ג) המעבר בין רמת
המיקרו לרמת המאקרו מחייב שימוש בשיטות הומוגניזציה
תוך התעלמות מארכיטקטורת המיקרו של המודל
הגיאומטרי. כתוצאה מכך, השיטה הזו לא יכולה להוות
שיטה רובוסטית לאנליזה מבנה העצם מרובה סקאלות.
במאמר זה אנו מציעים גישה חדשה לאנליזה אלמנטים
סופיים מרובת-סקאלות של מבנה העצם. כבסיס לאנליזה
חישובית ברמת המיקרו נחקרו שתי גישות פירוק לתת-
תחומים (Domain Decomposition). שיטות אלו הופעלו
על בעיות אלסטיות במישור. לגישה המוצעת קיים
פוטנציאל לגלות תובנות חדשות על מבנה העצם ועל
התנהגותו המכאנית.

שיטות אנליזה מרובת-סקאלות

גישה מרובת סקאלות (Multi-scale) משמשת לפתרון
בעיות בהן אנו מעוניינים לנצל הן את הפשטות והיעילות
של מודלי מאקרו והן את הדיוק והפרטים של מודלי מיקרו
תוך צימוד בין שני המודלים. מודלים מרובי סקאלות
מאפשרים מעבר מהיר בין הסקאלות ללא צבירת שגיאה.
שנים רבות נעשה שימוש בשיטות חישוביות מרובות
סקאלות, לדוגמא רישות מסתגל או שיטות רב סריגיות.
בשיטות הנפוצות כיום קיימות מספר קטן של רמות
היררכיות שונות של המבנה. לפיכך, ניתן לסווג את
השיטות האלה כמרובות רמות (Multi-level). למעשה,
שיטות אלו מאפשרות קיום של שתי רמות בלבד - רמת
המאקרו ורמת המיקרו, ללא רמות ביניים.

לעצם מבנה גיאומטרי היררכי, בעל תכונות חומר מכאניות
המשתנות משמעותית ברמות השונות של המבנה. לכן
מתבקש לבצע אנליזה מכאנית של מבנה העצם בשיטות
מרובות סקאלות. הגישה הנפוצה הינה מידול מסתגל.
גישה זו מבוססת על ייצוג של המודל ברמת המאקרו
כמודל הומוגני כאשר רק באזור העניין (Volume of Interest)
מוגדר מודל מיקרו. בין שני המודלים קיים צימוד.
הצימוד יכול להתבצע באמצעות Mesh superposition או
באמצעות שימור אנרגיה מעוותים בין המצבים המכאניים
בשתי הרמות. החיסרון של הגישה בכך שהגדלת אזור
העניין מגדילה את סיבוכיות המודל ומצריכה משאבי
חישוב גדולים יותר. סקירה של יתרונות וחיסרונות של
שיטות נפוצות, אשר הינן שיטות מרובות סקאלות, מגלה
שלא קיימת שיטה בעלת יתרונות מובהקים על פני שיטות
אחרות. מצד אחד, שיטות עם ייצוג גיאומטרי היררכי אינן
כוללות מודל פיזיקאלי היררכי, אשר הכרחי למידול
העצמות. מצד שני, שיטות עם מבנה פיזיקאלי היררכי הינן
מסובכות ליישום ובעלות זמן חישוב גבוה. לכן, נדרשת
שיטה חדשה אשר תכלול מודל גיאומטרי המשלב מולטי-
רזולוציה ומודל פיזיקאלי היררכי. היישום של השיטה
המוצעת יתבסס על יישום פשוט וסיבוכיות חישוב נמוכה.
בנוסף, על השיטה לאפשר מעבר מהיר בין הרמות השונות.

אנליזה אלמנטים סופיים מרובת-סקאלות של רקמת עצם

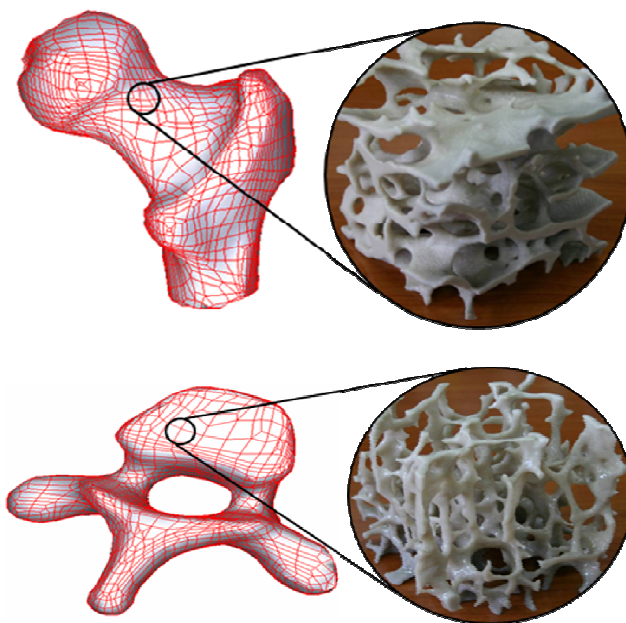
לב פודשיבלוב, ענת פישר ופנחס בר-יוסף

הפקולטה להנדסת מכונות, טכניון, חיפה

slpod@technion.ac.il

מבוא

עצמות הינן חומר ביו-מרוכב בעל מבנה היררכי עם
גיאומטריה תלת-ממדית מורכבת. ניתן לסווג מבנה עצם
לחמש רמות, החל מרמת המאקרו ועד לננו חלקים. מיקרו
מבנה של העצם הינו טרבקולרי ומורכב ממוטות דקים
ולוחות. מבנה זה משתנה משמעותית כתלות במיקום
האנטומי בגוף. השינוי מתבטא בגיאומטריה, עובי,
כיוונית ובגודל הטרבקולות. לדוגמא, מבנה דמוי מוטות
האופייני לחוליות עמוד השדרה שונה לחלוטין ממבנה
הלוחות של עצמות הירך, כפי שמוצג באיור 1.

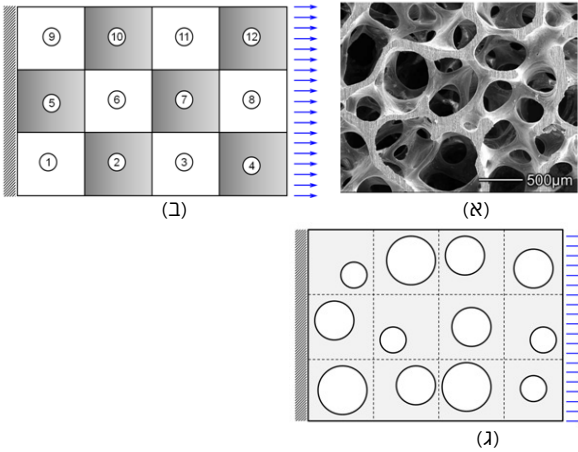


איור 1: מיקרו מבנה אופייני של עצמות: עצם הירך (ציור עליון)
וחולית עמוד השדרה (ציור תחתון).

ארכיטקטורת העצם יכולה להשתנות בתוך אותה העצם,
במיקומים שונים כפונקציה של התפקוד והעומסים
המופעלים עליה. לכן, מבנה העצם הינו ייחודי לכל אחד
מאיתנו ומושפע ממין, גיל, פעילות גופנית ומצב בריאותי.
תכונות אלו חשובות לדיאגנוזה של מחלות עצם מטבוליות,
דוגמת אוסטיאופורוזיס. מחלות עצם מטבוליות גורמות
לניוון במיקרו מבנה של העצם ולהתפתחות סדקים עם
סיכון מוגבר לשבר. אבחון מוקדם של מחלות אלו הינו
מפתח למתן טיפול רפואי יעיל ונכון.

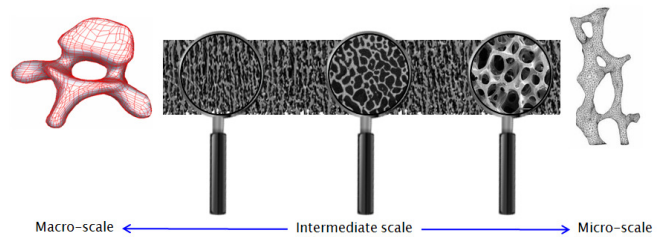
הגישה המוצעת

אנליזת אלמנטים סופיים מרובת-סקאלות הינה הכרחית לצורך ביצוע אנליזה מכאנית יעילה של העצם ברמת המיקרו-מבנה. שיטת אנליזה אלמנטים סופיים מרובת-סקאלות, המוצעת בעבודה זו, תאפשר לרופא להשתמש ב"זכוכית מגדלת חישובית" עם מעבר רציף בין רמת המיקרו לרמת המאקרו.



איור 3: שלבים של אנליזה מיקרו מבנה העצם בדו-ממד: (א) מבנה טרבקולארי; (ב) לוח מחולק לתת-תחומים תחת עומס מפולג אחיד; (ג) מבנה עצם מופשט דו-ממדי.

שפה אחת צריכה להיות עם תנאי שפה של תזוזות - Dirichlet Boundary Conditions. בהתאם לכך, הגדרנו את העברת המידע בין תתי תחומים כפי שמוצג באיור 4. העברת תנאי שפה של תזוזות בוצעה תוך שימוש במקדם תפוגה θ .



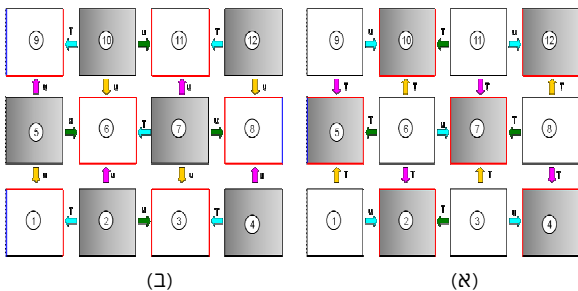
איור 2: הגישה המוצעת למודל מרובה-סקאלות של העצם.

למרות שיפור ניכר ביכולות חישוב של מחשבים אישיים, עדין לא ניתן לפתור בעיות עם מספר גדול של דרגות חופש (מיליוני דג"ח) על מעבד אחד עקב סיבוכיות חישוב גבוהה ודרישות משאבי זיכרון גדולים. לכן, נדרש בשלב זה, ליישם חישוב מקבילי על השיטה המוצעת. הגישה הטבעית לביצוע חישוב מקבילי הינה שיטה של פירוק לתת-תחומים [2] (Domain Decomposition). בשיטה זו הבעיה מחולקת למספר תתי-תחומים והפתרון מחושב בכל אחד מהם במקביל.

תוצאות

השילבים הראשונים של המחקר כללו פיתוח של שיטה חישובית לפתרון בעיית אלסטיות מישורית בתחום בעל גנוס-n ברמת המיקרו מבנה. לביצוע האנליזה השתמשנו בשיטת פירוק לתת-תחומים. האנליזה בוצעה על המודל שהותאם מתוך תמונת מיקרו מבנה העצם, בהתאם לשלבים המתוארים באיור 3. במקרה זה הגבלנו את הייצוג כך שכל תחום יכיל היותר חור אחד. מודל מורכב יותר מוצג בהמשך. בעצם אמיתית חורים אלו מלאים במח עצם אשר תרומתו לחוזק המכאני של המבנה זניחה.

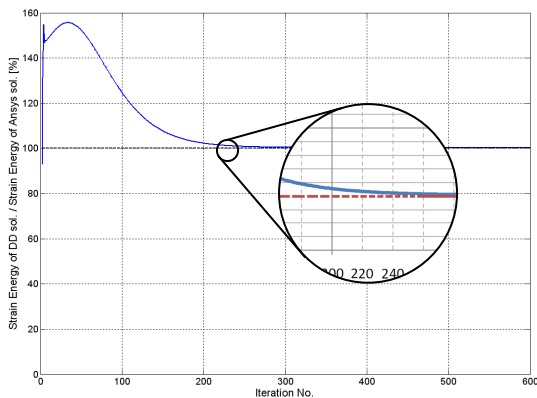
את מיקרו מבנה העצם מידלנו בתור בעיית אלסטיות במישור. בחרנו בלוח מלבני התפוס בצידו האחד, ושמופעל עליו עומס מתיחה אחיד בצידו השני. את הלוח חילקנו ל-12 תתי תחומים במטרה לייצר תתי תחומים ללא תנאי שפה גלובליים (תתי תחומים 6 ו-7 באיור 3). בהתאם לשיטת פירוק לתת תחומים ללא חפיפה [3] שייכנו לכל תחום צבעים שחור ולבן בדומה ללוח שחמט. אחד ההיבטים החשובים של השיטה הינו העברת המידע בין התחומים הסמוכים. במקרה זה נדרשנו להעביר שני משתנים פיזיקאליים: שדה התזוזות (u) ושדה ההסרחות (T). מאחר וכל תת תחום אמור להיות מוגדר היטב, לפחות



איור 4: העברת המידע בין תתי תחומים: (א) העברת המידע מתחומים הלבנים לשחורים; (ב) העברת המידע מתחומים השחורים ללבנים.

על מנת לאמת את נכונות הפתרון פתרנו את הבעיה הכוללת גם באמצעות תוכנת Ansys. באיור 5 מוצגת השוואה בין אנרגיית המעוותים U של שני הפתרונות, כאשר החישוב מבוצע לפי המשוואה

$$U = \frac{1}{2} (\sigma_x \epsilon_x + \sigma_y \epsilon_y + \tau_{xy} \gamma_{xy})$$



איור 5: היחס בין אנרגיית המעוותים שחושבה באמצעות פתרון פירוק לתת תחומים (קו כחול) לבין פתרון ב - Ansys (קו אדום מקווקו).

• התכנסות השיטה אינה מושפעת ממספר תתי תחומים ועל כן סקאלבילית.
 בהתאם לכך, השיטה יכולה לשמש בתור כלי מרכזי לפיתוח שיטה אנליזה מרובת סקאלות לאנליזה מאקרו- ומיקרו מבני העצם.

סיכום

בעבודה זו הצגנו גישה חדשה לאנליזה אלמנטים סופיים מרובת סקאלות של מיקרו מבנה העצם. גישה זו תאפשר מעבר רציף בין מודל המיקרו לבין מודל המאקרו של העצמות. שתי שיטות של פירוק לתתי תחומים נבדקו כבסיס לגישה המוצעת. פירוט נוסף על הגישה המוצעת ניתן למצוא במאמר שכתבנו על הנושא ומתואר ב [5]. בנוסף, השיטה המוצעת יכולה לשמש לתכן ביו-פיגומים לתיקון מיקרו מבנה העצם [6]. המחקר הנוכחי מתמקד בפיתוח המודל הגיאומטרי [7] ובמודל החומרי. המחקר העתידי ימקד בהרחבה של השיטה לתלת-מימד.

מקורות

- [1] van Rietbergen, B., "Micro-FE analyses of bone: state of the art". *Advances in Experimental Medicine and Biology*, Vol. 496, pp. 21-30, 2001
- [2] Magoulès F., Rixen D.(eds), "Domain Decomposition Methods: Recent Advances and New Challenges in Engineering". Special issue of the *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 196(8), 2007
- [3] Quarteroni A., "Domain decomposition and parallel processing for the numerical solution of partial differential equations". *Surveys on Mathematics for Industry*, Vol. 1, pp. 75-118, 1991
- [4] Farhat C., Roux FX., "A method of finite element tearing and interconnecting and its parallel solution algorithm". *Int. Journal of Numerical Methods in Engineering*, Vol. 32, pp. 1205-1227, 1991.
- [5] Podshivalov L., Holdstein Y., Fischer A., Bar-Yoseph P.Z., "Towards a multi-scale computerized bone diagnostic system: 2D micro-scale finite element analysis". *Communications in Numerical Methods in Engineering*, Vol. 25(6), pp. 733-749, 2009.
- [6] Holdstein Y., Podshivalov L., Fischer A., Bar-Yoseph P.Z., "Volumetric texture synthesis of bone micro-structure as a base for scaffold design". *Proceedings of IEEE International Conference on Shape Modeling and Applications (SMI'09)*, Tsinghua University, Beijing, China, June 26-28, 2009.
- [7] Podshivalov L., Fischer A., Bar-Yoseph P.Z., "2D Multi-Resolution Domain-Based Meshing for Multi-scale FE Analysis of Bone Micro-Structures". *Proceedings of an ECCOMAS and IACM Special Interest Conference, SEECOM 09*, Island of Rhodes, Greece, June 22-24, 2009.

רגע של עברית

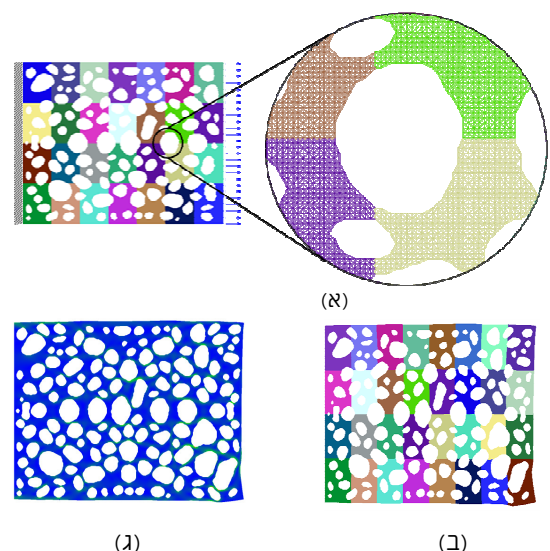
כאשר מהנדסת אומרת "הפתרון הזה הוא מדויק", למה בדיוק היא מתכוונת? למילה "מדויק" יש שני מובנים. באנגלית משתמשים בשתי מילים נפרדות – exact ו-accurate. "מדויק" במובן של exact פירושו שהשגיאה הקשורה לפתרון היא ממש אפס, כלומר הפתרון הוא הפתרון האמיתי של הבעיה, ללא שום קירוב. לעומת זאת, "מדויק" במובן של accurate פירושו שהשגיאה היא קטנה (אך אינה מתאפסת). לכן, כאשר הדבר לא מובן מההקשר, יש להזהר כאשר משתמשים במילה "מדויק", אחרת עלולה להתעורר אי-הבנה.

לפי תוצאות ההשוואה ניתן להגיע למסקנות הבאות:
 • השינוי הראשוני באנרגיה המעוותים תלוי בבחירת תנאי התחלה לאיטרציה ראשונה. התכנסות הפתרון תלויה בבחירת תנאי התחלה מתאימים, במיוחד כאשר מספר תתי תחומים הולך וגדל.

• הפתרון התכנס לאחר 240 איטרציות. פרמטר התפוגה θ המוזכר לעיל היה הגורם העיקרי להאטה בקצב ההתכנסות. ככל שמספר תתי תחומים גדל כך פרמטר התפוגה הנדרש קטן, מה שמובייל להתכנסות איטית יותר. לאור זאת במודלים גיאומטריים מורכבים, הכוללים מספר רב של תתי תחומים, שיטה זו אינה יעילה.

שיטת יעילה יותר לחלוקה לתת תחומים הינה Finite Element Tearing and Interconnecting (FETI), אשר פותחה ע"י Farhat and Roux בשנת 1991 [4]. עד היום בוצעו מספר רב של הרחבות לשיטה זו. שיטת FETI מבצעת צימוד בין תתי-תחומים הסמוכים זה לזה על-ידי הפעלת כופלי לגראנג' (λ) המייצגים את הכוחות ההדדיים אשר מופעלים בין כל שני תתי-תחומים סמוכים. שיטת FETI ניתנת לחישוב מקבילי כיוון שניתן לחשב עצמאית, על מעבד נפרד, כל תת-תחום. שלב החיבור ניתן לפתרון על-ידי שימוש בגישה ישירה עבור מספר קטן של צמתי ממשק או, לחילופין, באופן איטרטיבי. היתרונות של שיטת FETI על פני השיטה הקודמת הינם:

- שיטת FETI מאפשרת גמישות למימוש מחשוב מקבילי, כיוון שאין אילוף על סדר פתרון תתי התחומים השונים.
- שיטת FETI אינה מצריכה ניחוש ראשוני של גבולות התחום ולפיכך התוצאה אינה תלויה בטיבו של ניחוש ראשוני כזה או אחר.
- ניתן להפעיל פותרן ישיר לפתרון המודל.
- למימוש שיטת FETI נכתב יישום בסביבת Visual C++ לפתרון בעיות אלסטיות במישור. הנחנו מודל חומר הומוגני איזוטרופי ליניארי. הבעיה דמוית מיקרו מבנה העצם חולקה ל- 32 תתי תחומים כפי שמתואר באיור 6. כל תת תחום כלל כ- 2250 דרגות חופש וסה"כ כ- 72,000 דג"ח. במקרה זה המודל היה תפוס מצדו השמאלי ונתן ללחץ אחיד מצדו הימני.



איור 6: פתרון מודל דמוי עצם בדו-ממד בשיטת ה-FETI: (א) המודל המרושת מחולק לתתי תחומים; (ב) פתרון תוך הדגשת תתי תחומים נפרדים; (ג) מאמצי פון-מיזס.

התוצאות מאנליזה הביצוע של השיטה הינן כדלהלן:
 • שיטת FETI מאפשרת פתרון של מודלים בעלי גיאומטריה מורכבת.