

# עלון

## אי שח"מ

### עלון האיגוד הישראלי לשיטות חישוביות במכניקה

מספר 26

פברואר 2012

**עורך:** זהר יוסיבאש, המחלקה להנדסת מכונות, אונ' בן-גוריון בנגב, באר-שבע 84105, טל. 6477103 (08), פקס 6477101 (08), דואר אלקטרוני: [zohary@bgu.ac.il](mailto:zohary@bgu.ac.il)

**חברי ועד אישח"מ:** עמנואל אור, מיכאל אנגלמן, פנחס בר-יוסף, דן גבעולי (נשיא), יצחק הררי, עמיאל הרשגה (מזכיר-גזבר), יונתן טל (אחראי האתר), זהר יוסיבאש

**איש-קשר עם ECCOMAS:** מישל ברקובייר

**ועדת ביקורת:** משה איזנברגר ושמואל קידר

**אתר אישח"מ (IACMM) באינטרנט:** <http://www.iacmm.org.il>

**רישום לחברות באגוד ופרטים נוספים:** באתר האיגוד הנ"ל, או פנו למזכיר-גזבר,

ד"ר עמיאל הרשגה, טל. 8183709 (04), פקס 8183723 (04), דואר אלקטרוני: [amiel@iec.co.il](mailto:amiel@iec.co.il)

### מ-"שולחן העורך":

#### ISCM-32

יום העיון ה-32 יתקיים ב-22 במרץ, 2012, במכללה האקדמית להנדסה אפקה בתל-אביב. ראו באתר האיגוד ובהודעות לתפוצה.

#### חקר התגובה המכאנית המצומדת של דופן העורק באמצעות שיטות אלמנט סופי מסדר גבוה

#### **אלעד פריאל וזהר יוסיבאש**

המחלקה להנדסת מכונות, אוניברסיטת בן-גוריון בנגב. [prielel@zohary@bgu.ac.il](mailto:prielel@zohary@bgu.ac.il)

#### מבוא

מחלות כלי דם רבות מאופיינות בשינויים מבניים בדופן כלי הדם. כדי לחקור את הקשר האפשרי בין משטר המאמצים לפתולוגיה של מחלות יש ראשית לאפיין את התגובה המכאנית של כלי דם בריא. עורק בריא ניתן לתיאור כצינור דק דופן היפר-אלסטי כמעט בלתי דחיס, רב שכבתי ולא איזוטרופי העובר דפורמציות גדולות. בנוסף יש לקחת בחשבון את נוכחותם של תאי השריר החלק (Smooth muscle cells) בדופן העורק אשר יכולים לייצר כוח

גליון כפול זה מכיל שתי כתבות המבוססות על ההרצאות שזכו במקום הראשון והשני בתחרות במסגרת שני ימי העיון של האיגוד ISCM-30, ו ISCM-31. בהזדמנות זו ברצוני להודות למר אלעד פריאל מאונ' בן-גוריון, ולגב' קלרה זוסמן ולפרופ' דן גבעולי מהטכניון על המאמרים שהכינו והמובאים להלן.

אבקש לשוב ולעודד אתכם לשלוח אלי רעיונות לכתבות, נושאים שהייתם מעוניינים שיופיעו, או תגובות לפרסום על כתבות שכבר הופיעו בעבר. את החומר אנא שלחו אלי לכתובת האלקטרונית. ניתן ורצוי לצרף איורים ותמונות. ניתן גם לפרסם חומר מסחרי- פרסומי בתשלום.

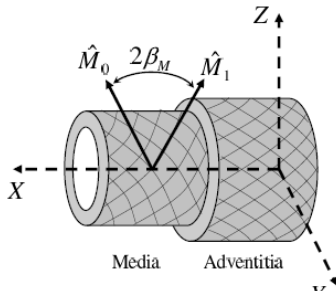
אנא בקרו באתר האיגוד <http://www.iacmm.org.il>, בו תמצאו מידע על האיגוד ועל מכניקה חישובית בארץ ובעולם. באתר תוכלו לצרף עצמכם (ללא תשלום) לרשימת התפוצה האלקטרונית. באתר תוכלו גם להרשם כחברים באגוד או לחדש את חברותכם. טופס רישום עם פרטים מלאים ניתן למצוא ב-

<http://www.iacmm.org.il/member>

שעבור  $p > 1$  ק יהיה ניתן לפתור את (2) על ידי הפעלת כל הכוח מבלי שיהיה צורך לחלק את הכוח למספר צעדים. דהיינו, הרעיון הינו להשתמש בפתרון שהתקבל עבור  $p-1$  כניחוש התחלתי עבור  $p$ . לשיטה זו אנו קוראים שיטת  $p$ -prediction.

### מודל מתמטי עבור עורק

עבור חומרים היפר אלסטיים שדה המאמצים נגזר מתוך פונקצית צפיפות אנרגיית עיבורים  $S = 2 \frac{\partial \Psi}{\partial C}$ . דופן העורק ניתנת לתיאור כמטריצה היפר-אלסטית כמעט בלתי דחיסה ואיזוטרופית המחוזקת בשתי משפחות של סיבי קולגן קשיחים [3] כמודגם באיור 1.



איור 1: תיאור העורק על פי [3]

פונקצית צפיפות אנרגיית העיבורים לתיאור התגובה הפאסיבית בנויה משני חלקים [4]:

$$\Psi_j = c_{1j} \left( I_{c1} I_{c3}^{\frac{1}{3}} - 3 \right) + \frac{1}{D_{1j}} \left( \sqrt{I_{c3}} - 1 \right)^2 + \frac{k_{1j}}{2k_{2j}} \sum_{i=4,6} \left\{ \exp \left[ k_{2j} (I_{ci} - 1)^2 \right] - 1 \right\} \quad (3)$$

האיבר הראשון והשני מתארים את תרומת המטריצה ההיפראלסטית והאיבר השלישי מתאר את תרומת הסיבים. כאן  $c_{1j}, D_{1j}$  מקושרים למודול הגזירה ומודול הנפח של המטריצה בהתאמה,  $k_{1j}, k_{2j}$  מייצגים את קשיחות סיבי הקולגן ו  $I_{ci}$  הינם האינוריאנטים של טנזור הדפורמציה הימני של קושי גרין. האינדקס  $j$  מציינ את השכבה הרלוונטית של העורק (Media או Adventitia).

### Verification של הקוד הנומרי בעזרת בעיות בוחן

לצורך חקר התגובה המכאנית של עורק נכתבה תוכנת אלמנט סופי מסדר גבוהה הקרויה (Simulation S.T.A.R Tool for Arterial Response). על מנת לאשר את הקוד הנומרי פותחו מספר בעיות בוחן עבור חומרים המאופיינים על ידי פונקציות צפיפות אנרגיית העיבורים (3). עבור בעיות בוחן אילו ניתן לחשב את הפתרון האנליטי ואשרור של הקוד בוצע על ידי השוואת הפתרון הנומרי לפתרון האנליטי. באיור מספר 2 לדוגמא ניתן לראות את ההתכנסות בנומרת האנרגיה עבור בעיה של דפורמציה לא הומוגנית של קובייה היפראלסטית (בסוגריים מצוין מספר האיטרציות להתכנסות של (2)). נעשה כאן גם שימוש בתוכנה מסחרית Abaqus לחומרים נאו-הוקיאניים בלתי דחיסים על מנת להשוואת בין שיטת h-FE לשיטת p-FE. כמו כן נבדק שימוש ואי שימוש ב p-prediction.

כתוצאה מעירור כימי. כל אילו מובילים לתיאור מתמטי מורכב שלא מאפשר פתרון בצורה אנליטית ומחייב שימוש בשיטות נומריות, כגון שיטת האלמנט הסופי. שיטת האלמנט הסופי מסדר גבוה (p-version finite elements) המבוססת על פורמוליציית ההזזות הודגמה כמאוד יעילה לפתרון בעיות של דפורמציות גדולות בחומרים היפר-אלסטיים איזוטרופיים [1]. במחקר שפורסם לאחרונה, הודגמה גם יכולתה של השיטה להתגבר על בעיית ה"נעילה" (locking) בחומרים היפר-אלסטיים איזוטרופיים כמעט בלתי דחיסים ללא צורך בשינוי הפורמוליציה או שימוש בשיטות היברידיות [2]. סיבות אילו, בנוסף לאפשרות השימוש באלמנטים צרים וארוכים (בעל חשיבות במידול של גופים דקי דופן) הופכת את שיטת האלמנט הסופי מסדר גבוה לכלי מתאים לחקר התגובה המכאנית של דופן העורק.

### שיטת ניוטון-ראפסון לפתרון בעיות של הזזות ועיבורים גדולים

כאשר מדובר בבעיה של הזזות גדולות ועיבורים גדולים, הניסוח החלש עבור משוואת שיווי המשקל אינו לינארי.

$$\text{Seek } U \in \hat{\mathcal{E}}(\Omega_0) \text{ such that} \\ \mathcal{P}^{Int}(U, Q) - \mathcal{P}^{Ext}(Q) + \mathcal{P}^{Kin}(U, Q) = 0 \\ \forall Q \in \hat{\mathcal{E}}(\Omega_0) \stackrel{\text{def}}{=} \{U(U) < \infty \mid U_{\partial\Omega_{out}} = 0\}$$

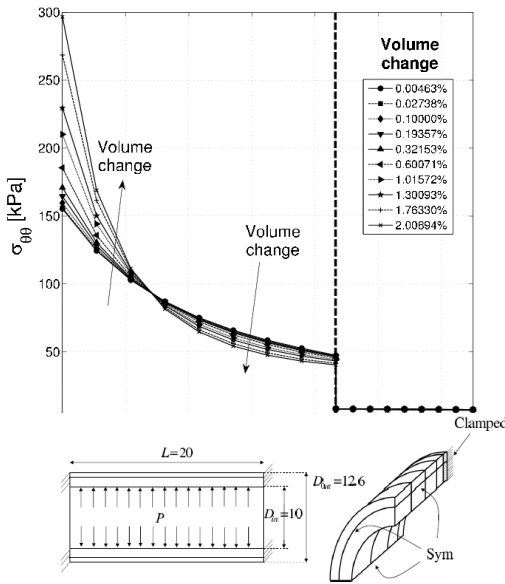
כאן  $U$  הוא וקטור ההזזות ו  $Q$  הינה פונקציית הבחון.  $\mathcal{P}^{Int}(U, Q)$  מייצג את עבודת הכוחות הפנימיים בעוד  $\mathcal{P}^{Ext}(U, Q)$  ו  $\mathcal{P}^{Kin}(U, Q)$  מייצגים את עבודת הכוחות החיצוניים ואת העבודה הקינטית בהתאמה. השיטה המקובלת לפתרון הבעיה הינה השיטה האיטרטיבית של ניוטון-ראפסון. ראשית מבצעים לינאריזציה של מערכת המשוואות ומקבלים מערכת משוואות אלגברית עבור אינקרמנט של התזוזה  $\Delta U$ .

$(D\mathcal{P}^{Int}(U^k, Q) - D\mathcal{P}^{Ext}(U^k, Q))(\Delta U) = \mathcal{P}^{Ext}(U^k, Q) - \mathcal{P}^{Int}(U^k, Q)$  בהינתן ניחוש התחלתי ל-  $U^{k=0}$  פותרים עבור  $\Delta U$  ואחר כך מעדכנים את הפתרון  $U^{k+1} = U^k + \Delta U$ . התכנסות מתקבלת כאשר אגף ימין של המשוואה קטן מערך סף שהמשתמש קובע (וקטור הכוחות הפנימיים שווה לוקטור הכוחות החיצוניים). שיטת ניוטון-ראפסון מתכנסת רק עבור ניחוש התחלתי שהינו מספיק קרוב לפתרון. על מנת להבטיח קיום תנאי זה מחלקים את העומס החיצוני למספר צעדי כוח כך שהשינוי בכל צעד כוח יהיה קטן יחסית לפתרון בצעד הכח הקודם. מספר הפעמים שיש לפתור את מערכת המשוואות (2) עד לקבלת הפתרון שווה למספר צעדי הכוח כפול מספר האיטרציות הנדרשות להתכנסות של (2).

### שיטת ה p-prediction

לצורך בדיקת התכנסות יש לפתור את הבעיה מספר פעמים כאשר כל פעם מגדלים את מספר דרגות החופש. בשיטות h-FE הגדלת מספר דרגות החופש מתבטאת בחלוקה ליותר אלמנטים תוך שמירת דרגת הפולינום מסדר 1 או 2. בשיטת p-FE מגדילים את מספר דרגות החופש ללא שינוי הרשת אלא על ידי הגדלת דרגת הפולינום של פונקציות הצורה מסדר גבוה יותר. כיוון שאין שינוי ברשת ניתן בקלות כאשר עוברים מרמת פולינום אחת לאחר ההתכנסות לרמת פולינום גבוהה יותר לקחת כניחוש התחלתי ל-  $U^{k=0}$  את הפתרון ברמת הפולינום הקודמת. כך

שעבור דחיסות של 2% ישנו שינוי של כ 50% בערך המאמץ ההיקפי בדופן הפנימי של העורק בהשוואה לפתרון המניח אי-דחיסות מלאה.



**איור 4:** למעלה: מאמץ היקפי בעומק דופן האורטה הביטנית תחת לחץ פיסיולוגי עבור ערכי דחיסות שונים. למטה: תנאי שפה ורשת חישוב.

התבוננות באיור 4 מראה שלא ניתן להזניח את הדחיסות הקלה במידול של העורק.

**התגובה המצומדת**

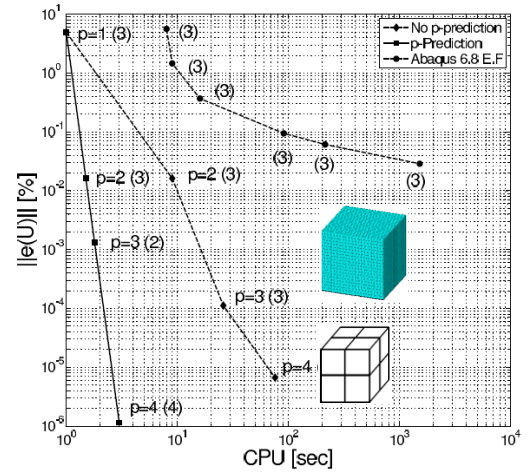
תאי השריר יכולים להתכווץ ולהפעיל כוח תחת עירור כימי. עוצמת הכוח שמופעל תלויה בשני גורמים. האחד מקשר בין רמת מתיחות סיב השריר לכוח שמתפתח (קשר מתיחות-כוח) והשני מקשר בין רמת הריכוז של החומר המערר והכוח שמתפתח (קשר ריכוז-כוח) [7]. אנו מציעים את פונקציה צפיפות אנרגיית העיבורים הבאה לתיאור התגובה המכאנית של סיבי השריר.

$$\Psi_{active}(IV_C^{MF}, [A]) = \begin{cases} S_{max} \frac{[A]^m}{[A]^m + EC_{50}^m} \left[ \frac{(\lambda_m - \sqrt{IV_C^{MF}})^3}{3(\lambda_m - \lambda_0)^2} + \sqrt{IV_C^{MF}} \right] \\ 0, \end{cases} \quad (4)$$

$\lambda_m$  הינו ה-stretch ratio שבה מתקבלת תגובה מקסימאלית לחומר העירור ו  $\lambda_0$  הינו ה-stretch ratio המינימאלי לקבלת תגובה אקטיבית.  $S_{max}$  הינו הערך המקסימאלי של מאמץ (פיולה הראשון) שיכול לפתח סיב השריר בכיוון הסיב,  $EC_{50}$  הינו הריכוז שבו מתקבלת תגובה של 50% מהמאמץ המקסימאלי ו- $m$  הוא פרמטר של פונקציית הריכוז-כוח. האיבר  $IV_C^{MF}$  הוא האינוריאנט הרביעי של טנזור הדפורמציה של קושי-גרין והוא מצוין את ריבוע ערך מתיחות סיב השריר בכיוון הסיב.

$$(4) \quad \lambda_1 = \lambda_0 + 2(\lambda_m - \lambda_0) \quad \text{כאשר } \lambda_0^2 < IV_C^{MF} < \lambda_1^2, \text{ ו-}$$

לצורך אפיון קבועי החומר השונים עבור התגובה האקטיבית השתמשנו בניסויים מתיחה תחת עירור קבוע שבוצעו על רצועה שנחתכה בכיוון סיבי השריר של שכבת ה Media מעורק הקרוטיד של חזיר [8]. באיור מספר 5 ניתן לראות

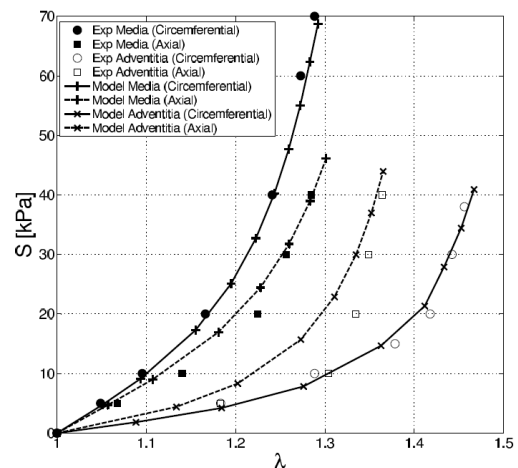


**איור 2:** התכנסות בנורמת האנרגיה: h-FEM כנגד p-FEM (עם וללא שימוש ב p-prediction) עבור בעיית בוחן [5].

תהליך אשרור הקוד המלא (גם עבור בעיית עורק כללית) ניתן למצוא ב [4].

**התאמת קבועי מודל מתוצאות ניסויים**

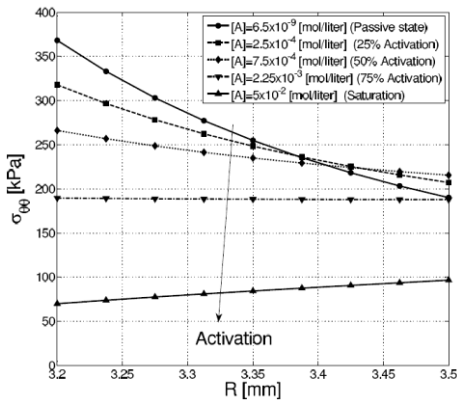
כדי לחקור את התגובה המכאנית יש לאפיין את קבועי החומר השונים ב (3) עבור כל שכבה של העורק. אפיון קבועי החומר לכל שכבה מתבצע לרוב על ידי ניסוי מתיחה של רצועות הנחתכות בכיוון האורכי ובכיוון ההיקפי מכל שכבה של העורק. בעבודה זו השתמשנו בתוצאות ניסוי מתיחה עבור אבי העורקים הבטני (Abdominal aorta) האנושי המדווח ב [5]. מכיוון שלמיטב ידיעתנו אין ניסוי דחיסה רדיאלית של האורטה האנושית השתמשנו הניסוי דחיסה רדיאלית שבוצעו על האורטה של ארנב [6] על מנת לאפיין את הפרמטר  $D_{1j}$ . התאמת הפרמטרים מוצגת באיור 3.



**איור 3:** התאמת פרמטרים ל (3) מתוך ניסויים מדווחים ב [5] ו [6].

**השפעת דחיסות הרקמה על התגובה המכאנית**

מרבית המחקרים בעבר מתייחסים לרקמת העורק כבלתי דחיסה למרות שניסויים הראו שקיימת דחיסות קלה של עד 3% בטווח הפיסיולוגי [6]. הפרמטרים שהותאמו שימשו אותנו בניסויים נומריים שמטרתם לבדוק את השפעת הדחיסות על התגובה המכאנית. הניסויים הנומריים מראים



איור 7: מאמץ היקפי לאורך עומק הדופן עבור ריכוזים שונים של חומר מעורר ותחת לחץ פיסילוגי.

[2] U. Heisserer, S. Hartmann, A. Duster, Z. Yosibash, On volumetric locking free behavior of p-version finite elements under finite deformations, *Com. Num. Meth. Eng.* **24** (11), (2008), 1019–32.

[3] G.A. Holzapfel, T.C. Gasser, R.W. Ogden, A new constitutive framework for arterial wall mechanics and a comparative study of material models, *J. Elasticity*, **61** (2000) 1–48.

[4] Z. Yosibash, E. Priel, p-FEMs for hyperelastic anisotropic nearly incompressible materials under finite deformations with applications to arteries simulation., *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **88** (2011) 1152–74.

[5] G.A. Holzapfel, Determination of material models for arterial walls from uni-axial extension tests and histological structure, *J. Theoretical Bio.* **238** (2006) 290–302.

[6] C.J. Chuong, Y.C. Fung, Compressibility and constitutive equation of arterial wall in radial compression experiments, *J. Biomech.* **17** (1984) 35–40.

[7] A. Rachev, K. Hayashi, Theoretical study of the effects of vascular smooth muscle contraction on strain and stress distributions in arteries. *Annals. Biomed. Eng.*, **27** (1999) 459–468.

[8] T. Jeremiah, T. Herlihy, A. Murphy. Length-tension relationship of smooth muscle of the hog carotid artery. *Circ. Research*, **33** (1973) 275–283.

## A finite element method for thin layer modeling in heat conduction

Clara Sussmann<sup>1</sup>, Dan Givoli<sup>1</sup> and Yacov Benveniste<sup>2</sup>.

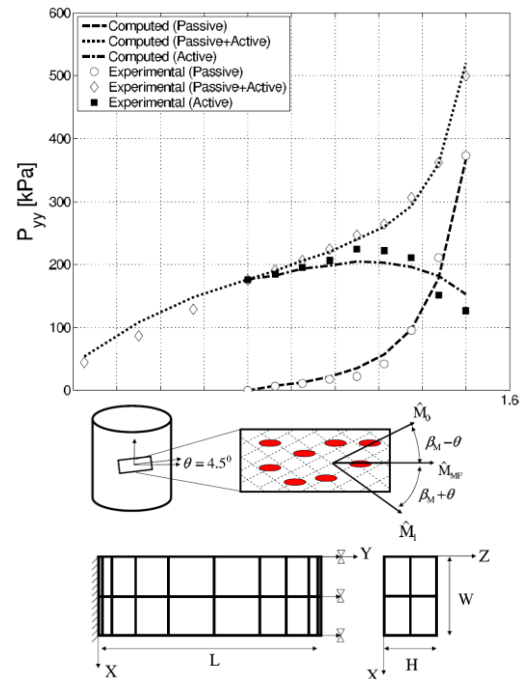
<sup>1</sup>Aero. Eng., Technion, <sup>2</sup>Mech. Eng., Tel-Aviv University. [clarasussmann@gmail.com](mailto:clarasussmann@gmail.com)

### Introduction

Thin layers with material properties which differ significantly from those of the adjacent media appear in a variety of applications, as in the form of fiber coatings in composite materials or protecting surface layers in the case of external coating.

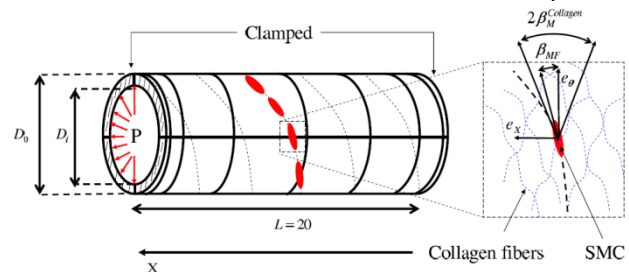
The full modeling of thin layers by standard

את התאמת הפרמטרים ואת יכולת המודל לתאר את התגובה המצומדת כולל הירידה בערכי המאמץ לאחר שעוברים את רמת המתוחות האופטימלית.



איור 5: למעלה: תגובה פסיבית, ומצומדת מודל וניסויים המדווחים ב [8]. למטה: תנאי שפה ורשת חישוב.

הפרמטרים שהותאמו שימשו לבחינת השפעת רמת ריכוז החומר המעורר וכיווניות סיב השריר על התגובה המכאנית של עורק כמתואר באיור 6.



איור 6: מודל לבחינת התגובה המצומדת בעורק.

באיור 7 מובאת השפעת רמת הריכוז של החומר המעורר על המאמץ ההיקפי בעובי הדופן. ניתן לראות שערור תאי השריר מפחיתה את המאמץ בדופן פנימית ויוצרת שיטוח של ערכי המאמץ בדופן.

**לסיכום**, הודגמו יתרונותיה של שיטת  $p$  של האלמנטים הסופיים בסימולציה של התגובה המכאנית של עורק. ניסויים נמרניים הראו שלא ניתן להזניח את הדחיסות הקלה לאור השפעתה הרבה על שדה המאמצים. הראנו שהכללת תרומתם של תאי השריר לתגובה המכאנית משפיעה באופן דרמטי על שדה המאמצים בעורק.

### Bibliography

[1] Z. Yosibash, S. Hartmann, U. Heisserer, A. Duster, E. Rank, M. Szanto. Axisymmetric pressure boundary loading for finite deformation analysis using p-FEM, *Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, **196** (2007) 1261–77.

fields in thin regions, combined with an elegant use of surface differential operators on a curved surface to achieve the representation of a thin interphase by an interface. In the 2006 paper by Benveniste, the Bovik model is generalized to an arbitrarily curved three-dimensional thin anisotropic layer between two anisotropic media, in the setting of unsteady heat conduction and in that of dynamic elasticity. The derived interface model consists of expressions for the jumps in the physical fields (temperature and normal heat flux in heat conduction) across the interface. Then, the solution of this two-phase “interface problem” approaches that of the original three-phase problem in the asymptotic limit when the thickness  $t$  of the layer goes to zero. The expressions obtained for temperature and normal heat flux are the following :

$$u^+ - u^- = -\frac{t}{2} \left[ \left( \frac{1}{k_0} - (1-\alpha) \frac{1}{k_2} \right) q_N^+ + \left( \frac{1}{k_0} - (1-\alpha) \frac{1}{k_1} \right) q_N^- \right]$$

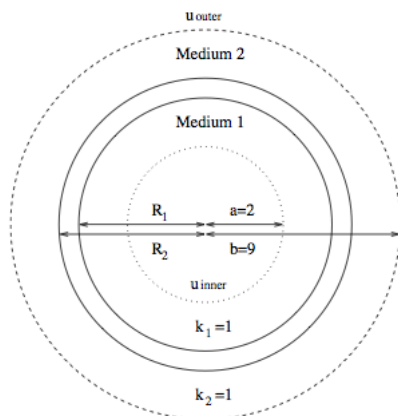
$$q_N^+ - q_N^- = \frac{t}{2} \left[ \frac{k_0 - (1-\alpha)k_2}{R_0^2} \left( \frac{\partial^2 u^+}{\partial \theta^2} \right) + \frac{k_0 - (1+\alpha)k_1}{R_0^2} \left( \frac{\partial^2 u^-}{\partial \theta^2} \right) \right]$$

These equations are then reorganized in terms of the normal heat flux only, so that they can be implemented in a finite element formulation, steps which will not be detailed here.

### **Numerical results for a circular layer**

We consider a 2D steady-state heat conduction problem whose analytic solution can be found. The geometry of both the original layer problem and the interface problem is described in the following figure. The values of the fixed radii are indicated in the figure. The thickness of the layer  $t$ , as well as the layer conductivity  $k_0$  will vary in the following experiments. The embedding media conductivities are chosen to be  $k_1 = k_2 = 1$ .

#### *Original Layer Problem*



Finite Element (FE) analysis is often associated with difficult meshing and high computational cost. An alternative has been known in the literature for some time in the form of asymptotic procedures which model such thin domains by an interface of no thickness on which appropriate interface conditions are devised.

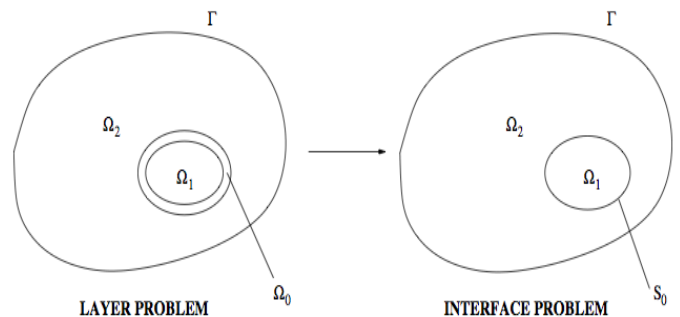
In this research work, it is shown how the first-order asymptotic interface model proposed by Bovik in 1994, and later generalized by Benveniste in 2006, can be incorporated in a FE formulation, to yield an accurate and efficient computational scheme for problems involving thin layers. This is done here for linear scalar elliptic problems in two dimensions, prototyped by steady-state heat conduction.

While the formulation was developed for a interphase of general shape, the first step was chosen to consider a thin layer of circular shape which would enable the model to be presented in the simplest possible setting and form. Later, research was extended to include thin layers of general shape as well as another possible application of thin layers, external coating. In that case, the outer medium is removed such that the layer itself is the outermost medium.

It is also shown that by somewhat modifying the formulation of the Bovik- Benveniste asymptotic model, the proposed formulation is, in the interphase problem, made to preserve the self-adjointness of the original three- phase problem, thus leading to a symmetric FE stiffness matrix. Numerical examples are presented that demonstrate the performance of the method, and show that the proposed scheme is more cost-effective than the full standard FE modeling of the layer.

### **Transition from the interphase to the interface model**

Motivated by an effort to simplify the analytic solution of boundary value problems involving thin layers, several *asymptotic models* have been proposed in the literature which model those layers as interfaces. The basic idea is shown in the figure below.



We show here how to combine the Bovik-Benveniste asymptotic model with a FE formulation, so as to yield an accurate and efficient computational scheme for thin-layer problems. Bovik used the simple idea of a Taylor expansion of the relevant physical

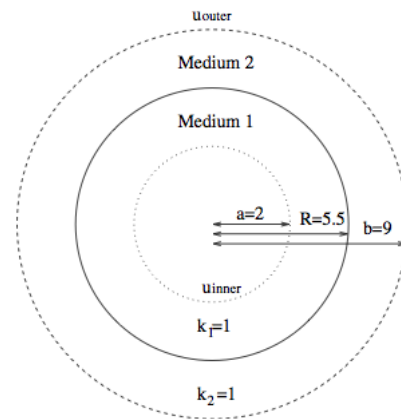


the error generated by traditional finite element modeling of thin layer problems. In the future, we hope to extend this technique to elasticity problems, and 3D modeling.

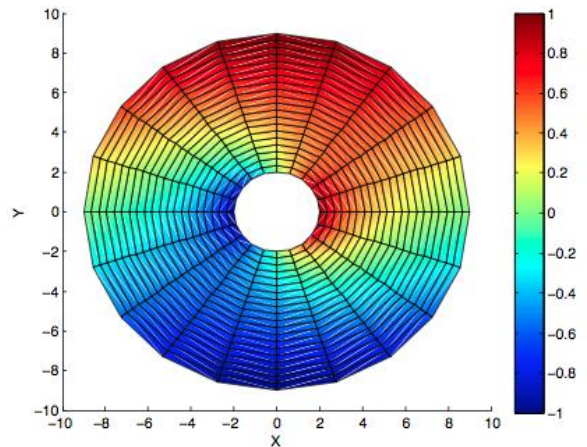
**Bibliography**

- [1] Y. Benveniste, "A General Interface Model for a Three-Dimensional Curved Thin Anisotropic Interphase Between Two Anisotropic Media," *J. Mech. Phys. Solids*, 54, 708–734, 2006.
- [2] P. Bovik, "On the Modeling of Thin Interface Layers in Elastic and Acoustic Scattering Problems," *Q. J. Mech. Appl. Math.*, 47, 17–42, 1994.
- [3] C. Sussmann and D. Givoli, "Special Finite Element Formulations based on Asymptotic Thin Layer Models," Proc. 10th Int. Conf. on Computational Structures Technology, Valencia, Spain, 2010

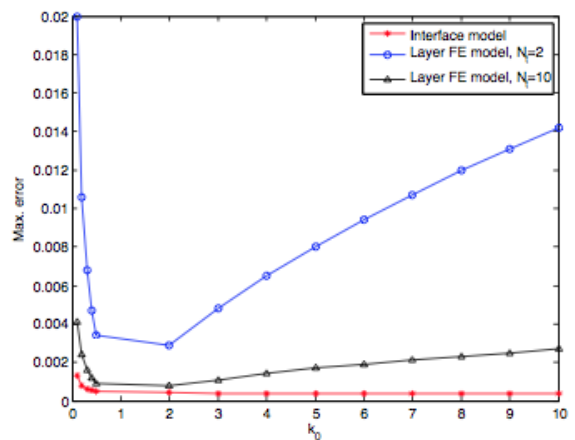
*Interface Problem*



For the asymmetric case in which  $u_{inner} = \cos \theta$  and  $u_{outer} = \sin \theta$ , we obtain the following graph for the temperature distribution in the interface model.



The graph hereafter shows the maximum error of the interface model, and two respective finite element models (with 2 and 10 elements in the layers), and compares them for a layer thickness of  $t = 0.1$



In red, we have the interface model error, which is smaller than the error for both FE models, hereby showing that with comparable computational effort, the error generated by the proposed model is smaller than