עלון אישח"מ

עלון האיגוד הישראלי לשיטות חישוביות במכניקה

מרץ 2013 מספר 28

מ-"שולחן העורך":

כבכל פעם, הנני פונה ומעודד אתכם לשלוח אלי בדוא"ל רעיונות לכתבות, נושאים שהייתם מעוניינים שיופיעו, או תגובות לפרסום על כתבות שכבר הופיעו בעבר. ניתן ורצוי לצרף איורים ותמונות. ניתן גם לפרסם חומר מסחרי- פרסומי בתשלום.

אני מבקש להודות לפרופ' יצחק הררי מאונ' ת"א על הענותו לחיבור הכתבה המאוד מעניינת בעלון זה המבוססת על הרצאתו באחד מימי העיון של האיגוד.

אנא בקרו באתר האיגוד http://www.iacmm.org.il, בו מידע על האיגוד ועל מכאניקה חישובית בארץ ובעולם. באתר תוכלו לצרף עצמכם (ללא תשלום) לרשימת התפוצה האלקטרונית, להירשם כחברים באגוד או לחדש את חברותכם. טופס רישום ניתן למצוא ב- http://www.iacmm.org.il/member.

יום העיון ה-33 אורגן ע"י דר' מחמוד ג'באריין ודר' עודד אמיר בפקולטה להנדסת אזרחית בטכניון, והיה פורה ומעניין.

ISCM-34

יום העיון ה-34 יתקיים ב-25 באפריל, 2013, באוניברסיטת תל-אביב (המארגנים הם פרופ' סלבה קרילוב ופרופ' ראמי חג'-עלי). המרצה המוזמן הוא Prof. Antonio Huerta, מהאוניברסיטה הטכנית של ברצלונה, בספרד
Universitat Politecnica de Catalunya, Spain
וכותרת הרצאתו:
Improving numerical efficiency with model reduction and high order adaptive discontinuous Galerkin
פרטים נוספים – ראו באתר האגוד ובהודעות לתפוצה.

שיטת ניטשה לתנאי שפה וממשק

יצחק הררי[1] וגיא שיבר

הפקולטה להנדסה, אוניברסיטת תל-אביב, רמת-אביב

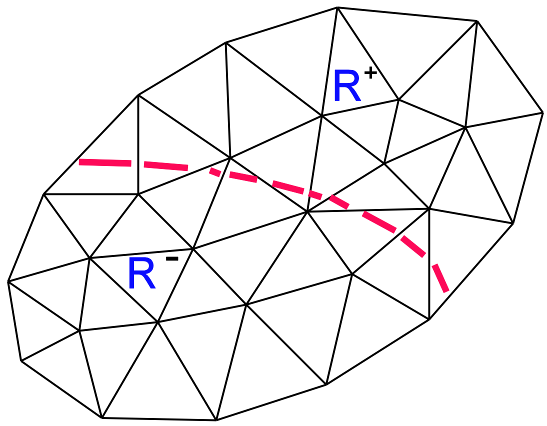
בניסוחים ווריאציונאליים קונבנציונאליים (וגם בשיטות אלמנטים סופיים המבוססות עליהם), סוגים שונים של תנאי שפה מטופלים בצורות שונות. תנאי דיריכלה (Dirichlet), הקרויים גם תנאי שפה קינמטיים או גיאומטריים) נאכפים במובן החזק, כלומר פתרונות הניסוי חייבים לקיימם מלכתחילה ע"מ להיות קבילים.

[1] תגובות ניתן לשלוח ליצחק הררי harari@eng.tau.ac.il

בדומה, פונקציות משקל קבילות חייבות לקיים את המקבילה ההומוגנית. תנאי שפה אלו נקראים תנאי שפה חיוניים בהקשר הווריאציונאלי. מנגד, תנאי נוימן (Neumann, וגם רובין Robin) נאכפים במובן החלש באמצעות המשוואה הווריאציונאלית ולפיכך נקראים תנאי שפה טבעיים.

בהקשר הבדיד, תנאי קבילות אלו דורשים שהרשת של האלמנטים הסופיים תהיה תואמת לשפת התחום ושבסיסי האלמנטים הסופיים יהיו אינטרפולטוריים. במקרים מסוימים עדיף לרפות דרישות אלו ע"מ להשתמש ברשתות בלתי תואמות, או לצורך שימוש בבסיסים שאינם אינטרפולטוריים כגון ספליינים (splines). לאחרונה גובר העניין בספליינים לצורך אנליזה בשל יכולתם לתאר גיאומטריות במדויק וגם להשיג רציפות מסדר גבוה בקלות יחסית.

מצב דומה מתרחש בתנאי ממשק המתארים אינטראקציה בין שדות מצומדים כגון המיקרו מבנה של חומרים מרוכבים, זרימה מרובת פאזות וגדילה של ביו-פילם, כמו גם באינטראקציה בין מבנה לזורם והצימוד האלקטרו מכאני בהתקני מערכות מיקרו אלקטרו מכאניות (MEMS). כאשר הממשק נייח, אבל בעל גיאומטריה מסובכת, בעיות אלו יכולות להיות מאתגרות במיוחד לחישוב, ואפילו יותר מאתגרות כאשר הממשק מתקדם. האסטרטגיה הקונבנציונאלית לטיפול במקרים אלו היא להתאים את הרשת לממשק. משימת הרישות במקרה זה יכולה להיות מסובכת והיא תצטרך לחזור על עצמה ככל שהגיאומטריה משתנה. לחילופין, ניתן לעשות שימוש ברשתות בלתי תואמות, איור 1, אבל דרוש טיפול מיוחד בתנאי



איור 1 – דוגמא לממשק מוטמע ברשת אלמנטים סופיים

הממשק. מגוון גישות להטמעת תכונות גיאומטריות ברשתות אלמנטים סופיים הוצעו, כמו X-FEM, immersed FEM, unfitted FEM ו- fixed mesh ALE.

האלטרנטיבה לטיפול הקונבנציונאלי בתנאי שפה וממשק היא לאכוף אותם בצורה חלשה כאילוצים. למעשה, ישנם חוקרים הדוגלים באכיפה חלשה של תנאי שפה במקרים מסוימים, דוגמת תנאי זרימה יוצאת בדינאמיקת זורמים, אפילו כאשר הכלים החישוביים לאכיפתם בצורה הקונבנציונאלית (רשתות תואמות ובסיסים אינטרפולטוריים) זמינים. במסגרת הווריאציונאלית, ישנן שתי שיטות קלאסיות לאכיפת אילוצי משטח בצורה חלשה. שיטה אחת היא שימוש בכופלי לגראנז' (Lagrange), אשר מובילה לניסוח היברידי. לחילופין, ניתן לקנוס אי קיום אילוצים כאלה במסגרת שיטות ענישה (penalty). ישנם יתרונות לשיטות ענישה על פני ניסוחים היברידיים בכך שהן פשוטות יותר וכרוכות בעלות חישובית נמוכה יותר היות והן לא מסתמכות על שדות עזר כמו כופלי לגראנז'. מנגד, שיטות ענישה גוררות שימוש בפרמטרים. תוצאות מחושבות יכולות להיות מאוד רגישות לערכים הנומריים של הפרמטרים ואלו נבחרים על פי רוב באופן אד הוק. גישה שלישית היא שיטת ניטשה (Nitsche), אשר במובנים מסוימים משלבת את היתרונות של שתי השיטות הקלאסיות ונמנעת מחולשותיהן.

הרעיון של הרפיית תנאי שפה חיוניים חוזר אחורה עד לעבודה פורצת הדרך של קוראנט (Courant) בה ניתן לומר ששיטת האלמנטים הסופיים הומצאה [1]. יישום ראשוני של כופלי לגראנז' לתנאי דיריכלה הוצע עבור יישומי תעופה וחלל בשנות השישים. לרעיונות אלו ניתנו מאוחר יותר יסודות מתמטיים מבוססים במאמרו המשפיע של בבושקה (Babuška) [2]. היציבות של ניסוחים היברידיים כאלו נשלטת ע"י תנאי inf-sup, המגביל את הצירופים המותרים של קרובי השדה הראשי (נפחי) והמשני (כופלי לגראנז'). מסתבר שסייג זה כה מגביל את היישום הישיר של שיטות אלו עד כדי כך שהינן בעלות ערך מעשי מועט. מצב זה הניע את הפיתוח של ייצוב הריבועים הפחותים בכדי לעקוף הגבלות אלו של תנאי ה-inf-sup.

ניטשה הציע ניסוח שהתחיל משיטת ענישה אך הוספו לו תנאים לשם עקביות ווריאציונאלית [3]. באותה עת הייתה לעבודה זו השפעה מועטה על קהיליית המכאניקה החישובית. מאוחר יותר, הנושא התגלה מחדש במאמר מפתח [4] אשר קישר אותו לגישות היברידיות מיוצבות כגון אלו שהוזכרו לעיל. המאמר הוביל לאבחנה שהפרמטר בשיטת ניטשה, יכול למעשה להיות מובן באופן קונסטרוקטיבי כפרמטר מייצב יותר מאשר בתור פרמטר ענישה. מתוך כך, ניתן לצפות לחוסר רגישות בביצוע חישובים ביחס לערך הנומרי של הפרמטר, וזמינות נהלים רציונאליים לבחירתו. מאז, שיטת ניטשה יושמה במגוון אפליקציות הכוללות domain decomposition, מגע, שיטות גלרקין בלתי רציפות ואכיפת תנאי שפה בשיטות נטולות רשת.

<u>רעיון בסיסי</u>

בכדי להציג את הרעיון הבסיסי בהקשר פשוט, ניתן להתייחס לבעיית מודל עבור דיפוזיה נייחת עם תנאי שפה דיריכלה. בהינתן הפונקציות f בתחום Ω, ו- g על השפה Γ, נחפש את הנעלם u המקיים

$$-\nabla\cdot\left(\kappa\nabla u\right) = f \quad \text{in } \Omega \qquad (1)$$

$$u = g \quad \text{on } \Gamma \qquad (2)$$

כאשר κ הוא פרמטר ידוע.

הניסוח הווריאציונאלי הסטנדרטי (צורה חלשה) לבעיה זו מנוסח במונחים של תנאי שפה חיוניים, כלומר פונקציות הנתונות לאילוצי קבילות: מצא פתרונות ניסוי המקיימים $u = g \quad \text{on } \Gamma$ כך שעבור כל פונקציית משקל המקיימת $v = 0 \quad \text{on } \Gamma$

$$\int_\Omega \nabla v \cdot \kappa \nabla u \, d\Omega = \int_\Omega v \, f \, d\Omega \qquad (3)$$

בעקבות בושקה, ניתן להרחיב את אוסף פתרונות הניסוי ע"י שימוש בכופלי לגראנז' λ בכדי לאכוף בצורה חלשה את תנאי השפה (עם פונקציות משקל תואמות μ), ובכך להתיר את תנאי הקבילות. הניסוח ההיברידי המתקבל הינו

$$\int_\Omega \nabla v \cdot \kappa \nabla u \, d\Omega - \int_\Gamma v \lambda \, d\Gamma = \int_\Omega v \, f \, d\Omega \qquad (4)$$

$$-\int_\Gamma \mu u \, d\Gamma = -\int_\Gamma \mu g \, d\Gamma \qquad (5)$$

ידוע היטב שמשוואת אוילר-לגראנז' במערכת ווריאציונאלית מצומדת כמתואר, מספקת אינטרפרטציה של כופל הלגראנז' כשטף על שפת התחום

$$\lambda = \kappa \nabla u \cdot \mathbf{n} \quad \text{on } \Gamma \qquad (6)$$

ניסוח היברידי מיוצב כפי שהוזכר לעיל, עם פרמטר מייצב $\alpha > 0$, מניב אינטרפרטציה של כופל הלגראנז' כשטף מוכלל על שפת התחום

$$\lambda = \kappa \nabla u \cdot \mathbf{n} + \alpha (u - g) \quad \text{on } \Gamma \qquad (7)$$

בשימוש בקשר זה לצורך צמצום כופלי הלגראנז' (ופונקציות המשקל שלהן) מתוך הניסוח ההיברידי מניב את שיטת ניטשה עבור הבעיה

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \nabla v \cdot \kappa \nabla u \, d\Omega - \int_\Gamma v \kappa \nabla u \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma \\ &- \int_\Gamma \kappa \nabla v \cdot \mathbf{n} u \, d\Gamma + \int_\Gamma v \alpha u \, d\Gamma = \\ &\int_\Omega v \, f \, d\Omega - \int_\Gamma \kappa \nabla v \cdot \mathbf{n} g \, d\Gamma + \int_\Gamma v \alpha g \, d\Gamma \end{aligned} \qquad (8)$$

זהו ניסוח של שדה בודד, כמו בצורה החלשה המקורית. לשטף המיוצב האוכף בצורה חלשה את תנאי השפה מתלווה ביטוי צמוד המספק סימטריה ועקביות ווריאציונאלית.

נרשת את התחום Ω לאזורים בלתי חופפים עם פרמטר רשת h. הרשת לא חייבת להתאים לשפה Γ, דהיינו היא יכולה להיות מוטמעת ברשת. הדיסקריטיזציה מבוססת על שיטת גלרקין, במונחים של מערכת פונקציות בעלות מימד סופי שתמיכתן נקבעת ע"י הרשת, ללא תלות בהגבלות על תנאי הקבילות הקינמטים. הפונקציות הנ"ל לא חייבות להיות אינטרפולטוריות.

הפרמטר המייצב מוגדר כך שיוכל להשיב את האליפטיות של הצורה החלשה המקורית. הליך זה מבוצע מקומית, עבור אלמנטים הנחתכים או גובלים בשפת התחום. לצורך כך, נעשה שימוש באומדן הפכי מוכלל, שקיים קבוע מימדי תלוי תצורה $C_1 > 0$ כך שנורמת האנרגיה של האלמנט חוסמת את שטף שפת האלמנט

$$\left\| \kappa \nabla v^h \cdot \mathbf{n} \right\|_\Gamma^e \le C_1 \left\| v^h \right\|_\kappa^e \qquad (9)$$

כל פרמטר ייצוב ברמת האלמנט צריך לקיים

$$\alpha > C_1^2 \qquad (10)$$

סכימה על האלמנטים מבטיחה את האליפטיות. ניסיון נומרי מראה כי בחירה שימושית היא $\alpha^e = 2C_1^2$.

בעיית ערכים עצמיים אלגברית מוכללת ברמת האלמנט מקושרת לאומדן ההופכי המוכלל. הערך העצמי הגדול ביותר מספק את חסם תחתון עבור הקבוע תלוי התצורה של ההערכה ההופכית התואמת. למשל, עבור משולשים ליניאריים

$$C_1^2 \ge \kappa L / A \qquad (11)$$

כאשר, $L = \text{meas}\left(\Gamma^e \cap \Gamma\right)$

בעיות ממשק

הדוגמאות הבאות ממחישות את היישום של הרעיונות לעיל עבור בעיות ממשק [5].

ניתן לחשוב על בעיית ממשק נייח בריבוע דו יחידתי, בעלת גיאומטריית ממשק המוגדרת ע"י אוסף הנקודות

$$\begin{cases} X = 0.02\sqrt{5} + \left(0.5 + 0.2\sin\left(5\theta\right)\right)\cos\left(\theta\right), \\ Y = 0.02\sqrt{5} + \left(0.5 + 0.2\sin\left(5\theta\right)\right)\sin\left(\theta\right), \end{cases}$$
$$-\pi \le \theta < \pi,$$

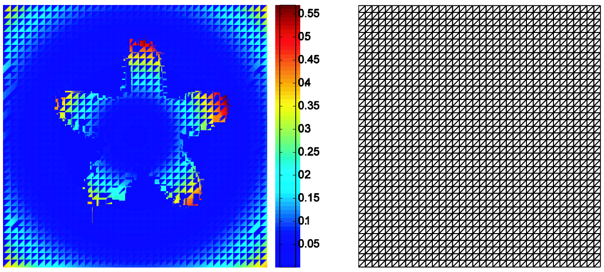
(12)

הבעיה מוגדרת כך שהפתרון המדויק $u(x, y)$ השווה

$$\begin{cases} x^2 + y^2 & \text{in interior} \\ 0.1\left(x^2 + y^2\right)^2 - 0.01\log\left(2\sqrt{x^2 + y^2}\right) & \text{in exterior} \end{cases}$$

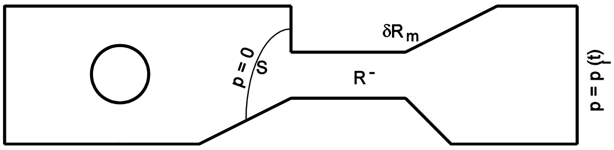
(13)

מציג קפיצה בממשק, יחד עם קפיצה בשטף. תנאים אלו נאכפים ע"י שיטת ניטשה. רישות טיפוסי מובנה (אשר איננו תואם את הממשק) והפתרון החישובי מוצגים באיור 2. הממשק בולט לעין.



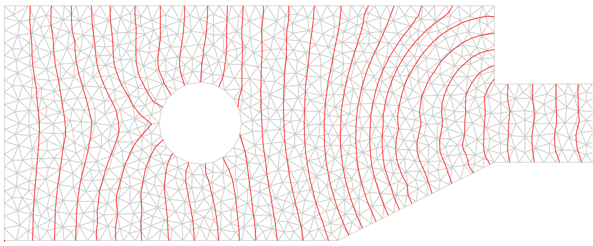
איור 2 – בעיית ממשק נייח: פתרון אלמנטים סופיים (שמאל) המתקבל עם רשת משולשים מובנית

עתה יוצג יישום של שיטת ניטשה עבור בעיית ממשק מתקדם. ניתן להסתכל על סימולציה של תהליך הייצור RTM (Resin Transfer Molding), בו שרף בצמיגות נמוכה מוזרק לתוך תבנית המכילה חומר משריין נקבובי, איור 3. הממשק הוא פני השטח החופשיים המתקדמים ככל שהשרף ממלא את התבנית. הבעיה נפתרת עבור הלחץ בחלק התבנית המלא בשרף. הלחץ בממשק נקבע כאפס. הלחץ כתלות בזמן בכניסה נקבע מניסויים. מניחים תנאי החלקה מושלמת (תנאי שפה חופשיים משטף) היכן שהשרף פוגש את דפנות התבנית. הבעיה מחושבת עבור רשת רקע קבועה ונעשה שימוש בשיטת ניטשה ע"מ לאכוף את התנאי על פני השטח החופשיים של השרף.



איור 3 – תהליך RTM: גיאומטריה

הגיאומטריה של החזית מקודמת ע"י Level Set Method. מהירות החלקיק האפקטיבית בחזית מחושבת מתוך הלחץ באמצעות חוק דארסי (Darcy), בהתבסס על החדירות, הצמיגות הדינאמית והנקבוביות.
הגדלה של גיאומטריית החזית בקרבת החור, בצעדי זמן שונים, מוצגת על רשת הרקע באיור 4. הדמיית החזית מתקדמת מונוטונית ובצורה חלקה ככל שהרשת מאפשרת. תוצאות אלו מציגות השוואה איכותית טובה לאלו שפורסמו בספרות.



איור 4 – תהליך RTM: מיקומים של חזית זרימה רציפה על רשת רקע בקרבת החור

<u>מראי מקום</u>

1. R. Courant. Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations. Bull. Amer. Math. Soc., 49:1-23 (1943).
2. I. Babuska. The finite element method with Lagrangian multipliers. Numer. Math. 20:179-192 (1973).
3. J. Nitsche. Über ein Variationsprinzip zur Lösung von Dirichlet-Problemen bei Verwendung von Teilräumen, die keinen Randbedingungen unterworfen sind. *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg,* 36:9-15 (1971).
4. R. Stenberg. On some techniques for approximating boundary conditions in the finite element method, J. Comput. Appl. Math. 63:139-148 (1995).
5. J. Dolbow and I. Harari. An efficient finite element method for embedded interface problems. *Internat. J. Numer. Methods Engrg.*, 78:229-252 (2009).