

עלון האיגוד הישראלי לשיטות חישוביות במכניקה

מספר 38

פברואר 2018

עורך: אלעד פריאל, המחלקה להנדסת מכונות, המכללה האקדמית להנדסה סמי שמעון, באר-שבע 84100, טל. 6475884 (08), דואר אלקטרוני: eladp@sce.ac.il

חברי ועד אישח"מ: מיכאל אנגלמן, רמי בן-צבי, פנחס בר-יוסף, דן גבעולי, יצחק הררי, עמיאל הרשגה, יונתן טל (אחראי האתר), זהר יוסיבאש (נשיא), סלבה קרילוב (מזכיר-גזבר)

איש-קשר עם ECCOMAS: מישל ברקובייר

ועדת ביקורת: מחמוד ג'בארין ומרדכי סנטו

אתר אישח"מ (IACMM) באינטרנט: <http://www.iacmm.org.il>

רישום לחברות באגוד ופרטים נוספים: באתר האיגוד הנ"ל, או פנו למזכיר-גזבר, פרופ' סלבה קרילוב, טל. 054-7746664, דואר אלקטרוני: krylov@tauex.tau.ac.il



ISCM43 – פרופ' Bischoff (במרכז התמונה) והוועד המנהל של האיגוד הישראלי לשיטות חישוביות במכניקה.

בנוסף להרצאת הפתיחה המרתקת ניתנו במסגרת יום העיון עוד אחת-עשר הרצאות של חוקרים וסטודנטים מהאקדמיה ומהתעשייה. הרצאות שניתנו על ידי סטודנטים בימי העיון הן 42 והן 43 השתתפו בתחרות ההרצאה המצטיינת. במסגרת תחרות זו זכתה במקום הראשון הרצאתה של הגברת דאנא באשרה (סטודנטית של פרופ' מחמוד ג'בארין מהפקולטה להנדסה אזרחית וסביבתית בטכניון) כהרצאה המצטיינת לשנת 2017 ובמקום השני נבחרה הרצאתו של מר חנן עמר (סטודנט של פרופ' דן גבעולי מהפקולטה לאווירונאוטיקה וחלל בטכניון). ברכות חמות לדאנא ולחנן. למי שבמקרה פספס את הרצאתה של דאנא ביום העיון, מצורף בעלון זה מאמר קצר העוסק במחקר שאותו הציגה ביום העיון האחרון. תודה רבה לדאנא ולמנחה שלה פרופ' ג'בארין על הנכונות לכתוב את המאמר המופיע בעלון זה.

מ-"שולחן העורך":

בשנות הארבעים של המאה ה-20 כתב הסופר והמדען אייזק אסימוב את סדרת ספרי ה"רובוטים". הספרים מתארים בצורה אמינה (מבחינה מדעית) את צורת התכנות ומבנה המוח של יצירים מלאכותיים אלו. עם זאת, כאיש מכאניקה, אותי תמיד עניין הצד המכאני שאסימוב לא הרחיב עליו במיוחד (בהיותו ביו-כימאי). לשמחתי הרבה המאמר המופיע בעלון זה מספק הסבר חלקי למכאניקה האפשרית מאחורי הרובוטים שאסימוב ברוב כישורו הגה. מקווה שגם אתם תהנו מקריאת המאמר.

כמו תמיד, אשמח לשמוע מכל אחד ואחת מחברי האיגוד בנוגע לתכנים אשר הם היו מעוניינים לראות מופיעים בעלון. אנא פנו אלי במייל בכל שאלה או הצעה.

אתם מוזמנים לבקר באתר האיגוד בו תמצאו מידע על האיגוד ועל מכאניקה חישובית בארץ ובעולם <http://www.iacmm.org.il>. באתר תוכלו לצרף עצמכם (ללא תשלום) לרשימת התפוצה האלקטרונית, להירשם כחברים באגוד או לחדש את חברותכם. טופס רישום לאיגוד ניתן למצוא ב <http://www.iacmm.org.il/member>.

עדכונים מיום העיון הקודם:

יום העיון ה-43 נערך ב-19 באוקטובר בבית הספר להנדסה מכנית באוניברסיטת תל אביב. (המארגנים המקומיים היו פרופ' יצחק הררי ופרופ' סלבה קרילוב).

המרצה האורח היה Prof. Manfred Bischoff, Institute for Structural Mech., Stuttgart Univ., Germany.

האורח נתן הרצאה מעניינת מאד העוסקת באחד מהנושאים ה"חמים" היום בתחום של שיטות חישוביות.

Rotation-free parameterization and isogeometric discretization of shear deformable shells

הטבעיים הלא-הומוגניים. באופן כללי טנסור זה מבוטא בעזרת רכיבים קוואריינטיים אשר מוכפלים בווקטורי בסיס קונטראוואריינטיים

$$\mathbf{E} = \varepsilon_{ij} \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{G}^j, \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (\mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_j - \mathbf{G}_i \cdot \mathbf{G}_j). \quad (1)$$

בבטוי (1), $\mathbf{G}_i = \partial \mathbf{X} / \partial \xi_i$, $\mathbf{g}_i = \partial \mathbf{x} / \partial \xi_i$, הם וקטורי הבסיס הקוואריינטיים של המערכת לפני הדפורמציה ואחריה, בהתאמה. הרעיון שעומד מאחורי עיקרון העיבורים המשוערים הטבעיים הלא-הומוגניים הוא הפרדת טנסור העיבור לשני חלקים. חלק ראשון שהוא איננו תלוי בקואורדינטות וחלק שכן תלוי בקואורדינטות ויקרא מעוות לא הומוגני

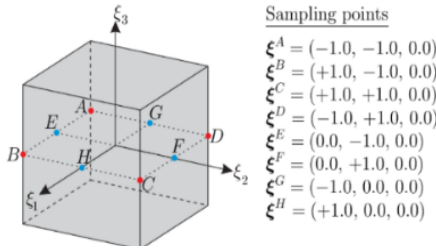
$$\mathbf{E}^{inh.} = \mathbf{E} - \mathbf{E}_0, \quad \mathbf{E}_0 = \mathbf{E}(\xi = \mathbf{0}). \quad (2)$$

הרכיבים הקוואריינטיים של המעוות לא הומוגני נתונים ע"י

$$\hat{E}_{ij}^{inh.} = \mathbf{E}^{inh.} : (\mathbf{G}_i \otimes \mathbf{G}_j). \quad (3)$$

כדי לרפות את האלמנט מנעילת הגזירה בכפיפה ומהנעילה המתרחשת כאשר האלמנט הוא בעל צורה של טרפז, עיבורי הגזירה (המקבילים למישור) והעיבור הנורמלי (הניצבים למישור) נדגמים בנקודות מיוחדות (ראה ציור מס' 1). עיבורים משוערים אלו מחושבים לפי אינטרפולציה ליניארית עבור עיבורי הגזירה ולפי אינטרפולציה ביליניארית עבור העיבורים הנורמליים

$$\begin{aligned} \tilde{E}_{13}^{inh} &= N_E \hat{E}_{13}^{inh}(\xi^E) + N_F \hat{E}_{13}^{inh}(\xi^F), \\ \tilde{E}_{23}^{inh} &= N_G \hat{E}_{23}^{inh}(\xi^G) + N_H \hat{E}_{23}^{inh}(\xi^H), \\ \tilde{E}_{33}^{inh} &= N_A \hat{E}_{33}^{inh}(\xi^A) + N_B \hat{E}_{33}^{inh}(\xi^B) \\ &+ N_C \hat{E}_{33}^{inh}(\xi^C) + N_D \hat{E}_{33}^{inh}(\xi^D). \end{aligned} \quad (4)$$



איור 1: נקודות ההדגמה אשר יושמו ב ANIS.

טנסור העיבור הלא-הומוגני המשוער יהיה בנוי מאותן רכיבים משוערים (4) ומהרכיבים הרגילים לפי

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^{ANIS} &= \hat{E}_{11}^{inh} (\mathbf{G}^1 \otimes \mathbf{G}^1) + \hat{E}_{22}^{inh} (\mathbf{G}^2 \otimes \mathbf{G}^2) \\ &+ \tilde{E}_{33}^{inh} (\mathbf{G}^3 \otimes \mathbf{G}^3) \\ &+ \hat{E}_{12}^{inh} (\mathbf{G}^1 \otimes \mathbf{G}^2 + \mathbf{G}^2 \otimes \mathbf{G}^1) \\ &+ \tilde{E}_{13}^{inh} (\mathbf{G}^1 \otimes \mathbf{G}^3 + \mathbf{G}^3 \otimes \mathbf{G}^1) \\ &+ \tilde{E}_{23}^{inh} (\mathbf{G}^2 \otimes \mathbf{G}^3 + \mathbf{G}^3 \otimes \mathbf{G}^2), \end{aligned} \quad (5)$$

ובכך, טנסור המעוות הקומפטיבילי המעודכן יהיה נתון ע"י

$$\mathbf{E}^{comp} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}^{ANIS}. \quad (6)$$

רפיו תופעות הנעילה הנפחית המתאפיינת בחומרים בלתי דחיסים או כמעט בלתי דחיסים וגם שיפור תגובת האלמנט למעוותי כפיפה למשל, מצריכה את העשרת טנסור העיבור הקומפטיבילי. העשרה זו מתקבלת ע"י הוספת טנסור עיבור

יום העיון ה-44 יתקיים ב-22 במרץ 2018, באוניברסיטת בן גוריון (המארגנים המקומיים הם דר' יורי פלדמן ודר' ארז גל). המרצה המוזמן הוא Prof. Rene de Borst, the Centenary Professor of Civil Engineering at the University of Sheffield, UK

פרטים נוספים ניתן למצוא באתר האיגוד ובהודעות לתפוצה.

פורמוליציית אלמנטים סופיים יעילה למידול פולימרים אלקטרו-אקטיביים

דאנא בשארה¹, מחמוד ג'בארין¹

¹ הפקולטה להנדסה אזרחית וסביבתית, הטכניון - מכון טכנולוגי לישראל, חיפה 32000, ישראל.

הקדמה:

פולימרים אלקטרו-אקטיביים הינם חומרים פונקציונאליים המגיבים לגירוי חשמלי עם שינוי ניכר בצורה, ונחשבים לחומרים מיוחדים בשל יכולתם לחוות עיבורים גדולים של עשרות ואף מאות אחוזים. תכונה זו מאפשרת את שילובם במגוון יישומים הנדסיים, שביניהם אפשר למנות: משפיעים, חיישנים במצלמות, משאבות, שסתומים וכדו'. בספרות המקצועית הפולימרים האלקטרו-אקטיביים מכונים בכינוי "שרירים מלאכותיים" (Bar-Cohen 2001) לאור שילובם המוצלח בזרועות רובוטיות. יתרונותיהם של הפולימרים האלקטרו-אקטיביים מתבטאות במספר תכונות: מחיר נמוך יחסית, משקל קל, גמישות בעיצוב הצורה הרצויה, מהירות התגובה של החומר לגירוי, והאפשרות לעבור עיבורים גדולים.

כדי לספק כלי חישובי למידול מבנים שעשויים מחומרים אלו, יש צורך בפיתוח פורמוליציית אלמנטים סופיים מסוגלת להתמודד עם אופי הדפורמציה שחומרים אלו חווים. בפרט, פולימרים הינם חומרים כמעט בלתי דחיסים ולכן, פורמוליציית האלמנטים הסופיים צריכה להתגבר על הנעילה הנפחית שעלולה להתרחש. כמו כן, פולימרים אלקטרו-אקטיביים מעוצבים בתצורות של מבנים דקים, ולכן פורמוליציית האלמנטים הסופיים אמורה להיות מסוגלת לחזות את דפורמציות הכפיפה בצורה מהימנה.

לאור האמור לעיל, בעבודה זו מוצגת פורמוליציית ה-Solid-shell. פורמוליצייה זו, מסוגלת להתגבר על כל סוגי הנעילה השונים העלולים להתרחש במבנים דקים העשויים מחומרים כמעט בלתי דחיסים. הפורמוליצייה מושתתת על שני עקרונות בסיסיים, שהראשון ביניהם נקרא עיקרון העיבורים המשוערים הטבעיים הלא-הומוגניים (Assumed natural inhomogeneous strains - ANIS) והוא מיועד להתמודד עם נעילת הגזירה בכפיפה (transverse shear locking) וגם הנעילה הנגרמת מאלמנטים בצורת טרפז (curvature-thickness locking), ראה (Jabareen and Mtanes), (2016). העיקרון השני נקרא העיבורים המשוערים המוגברים (Enhanced assumed strains), ראה (Simo et al., 1993).

קינמטיקה:

טנסור העיבור הלא-ליניארי של גריין-לגרנג' הוא מדד המעוות שבו נשתמש לצורך יישום עיקרון העיבורים המשוערים

$$\Pi^e = \int_{\Omega_0^e} W(\tilde{\mathbf{C}}, \mathbf{E}) d\Omega_0^e - \Pi^{ext,e}. \quad (12)$$

פיתוח הביטוי לווקטור "הכוחות" הפנימיים של האלמנט הסופי מתחיל מהפעלת הווריאציה על ביטוי האנרגיה הכוללת לפי כל השדות השונים הבלתי-תלויים

$$\delta \Pi^e = \int_{\Omega_0} \tilde{\mathbf{S}} : \delta \mathbf{E}^{comp} d\Omega_0 + \int_{\Omega_0} \tilde{\mathbf{S}} : \delta \mathbf{E}^{enh} d\Omega_0 - \int_{\Omega_0} \mathbf{D} \cdot \delta \mathbf{E} d\Omega_0 - \delta \Pi^{ext,e}. \quad (13)$$

שימוש בכתוב המטריציוני, ע"י השימוש בסימון של Voigt, ודיסקריטציה לשדה ההזזות ושדה הפוטנציאל החשמלי, הביטוי הווריאציוני (13) ניתן לרשום אותו באופן הבא

$$\delta \Pi^e = \delta \underline{\mathbf{u}}^T \underline{\mathbf{F}}_u^{int} + \delta \underline{\phi}^T \underline{\mathbf{F}}_\phi^{int} + \delta \underline{\alpha}^T \underline{\mathbf{F}}_\alpha^{int} - \delta \underline{\mathbf{u}}^T \underline{\mathbf{F}}_u^{ext} \quad (14)$$

כאשר ווקטורי "הכוחות" הפנימיים נתונים ע"י

$$\underline{\mathbf{F}}_u^{int} = \int_{\Omega_0} \underline{\mathbf{B}}_u^T \underline{\mathbf{S}} d\Omega_0, \quad \underline{\mathbf{F}}_\phi^{int} = - \int_{\Omega_0} \underline{\mathbf{B}}_\phi^T \underline{\mathbf{D}} d\Omega_0$$

$$\underline{\mathbf{F}}_\alpha^{int} = \int_{\Omega_0} \underline{\mathbf{M}}^T \underline{\mathbf{S}} d\Omega_0. \quad (15)$$

כיוון שהמשתנים הפנימיים של טנסור העיבורים המועשרים אינם עושים עבודה, ערכם של משתנים אלו ייקבע מהדרישה ש- $\underline{\mathbf{F}}_\alpha^{int} = \mathbf{0}$. התהליך האיטרטיבי של סכמת ניוטון-רפסון שתאפשר קביעת המשתנים הפנימיים של טנסור העיבורים המועשרים הוא

$$\underline{\mathbf{K}}_{\alpha\alpha} \Delta \underline{\alpha} + \underline{\mathbf{F}}_\alpha^{int} = \mathbf{0}, \quad \underline{\mathbf{K}}_{\alpha\alpha} = \int_{\Omega_0} \underline{\mathbf{M}}^T \underline{\mathbf{D}}_{uu} \underline{\mathbf{M}} d\Omega_0. \quad (16)$$

לבסוף, מטריצת הקשיחות הטנגנטית תתקבל מלינארזאציה של הביטוי הנתון ב-(13).

מקדמי החומר של VHB

VHB הינו פולימר אקרילי אשר נחשב לחומר דיאליקטרי מבטיח. בעבודתם של Bishara and Jabareen, פונקציית אנרגיית העיבורים (9) אופיינה וכוילה ע"י השימוש בסט של ניסויים מהספרות שמתייחסים למצבי דפורמציה חד-ציריים ודו-ציריים. בפרט, ניסויים שהובאו בתהליך הכיול כוללים העמסה ופריקה במתיחה חד צירית, ניסויי יניקה של משפעים מעגליים, וניסויי העמסה חשמלית (Wissler 2007). באופן פרטני, ניסויי העמסה החשמלית בוצעו תוך שימוש במשפעים מעגליים, אשר נמתחים רדיאלית מבעוד מועד ובמרכזם נמרחו אלקטרודות מעגליות גמישות שהועמסו בהפרש פוטנציאלים מוכתב. שינוי הרדיוס של האלקטרודה הפנימית נמדד כפונקציה של הזמן, והעיבור הרדיאלי ניתן אף הוא באיור 2. בשביל חילוץ מקדמי החומר, בוצע תהליך מינימזציה איטרטיבי, אשר מטרתו למזער את ההפרש בין תוצאות הניסויים לתוצאות אשר מתקבלות מהמודל. מקדמי החומר (ביחידות של מג"פ) של החלק ההיפראליסטי בפונקציית אנרגיית העיבורים (9) ניתנים ע"י: $c_1 = 7.0244 \times 10^{-3}$, $c_2 = -1.4108 \times 10^{-6}$, $c_3 = 2.1909 \times 10^{-7}$. המקדמים אשר מאפיינים את ההתנהגות הויסקואליסטית מוצגים בטבלה 1.

שמכיל מודים נוספים שלא נכללו בטנסור העיבור הקומפטיבילי ולו קוראים טנסור העיבור המועשר, ראה Simo et al. 1993, והוא מחושב ע"י

$$\underline{\mathbf{E}}^{enh} = \mathbf{M} \underline{\alpha}, \quad \mathbf{M} = \frac{|J_0|}{|J|} \mathbf{T}_0 \tilde{\mathbf{M}}. \quad (7)$$

כאשר $\underline{\alpha}$ הוא וקטור של משתנים פנימיים המאפיינים את העיבור המועשר ו- $\tilde{\mathbf{M}}$ מטריצה אשר מכילה את המודים של העיבור המועשר. בעבודתם של Jabareen and Matnes 2016 הוצע להשתמש ב-20 מודים אשר יבטיחו אלמנט בעל דיוק גבוה וריפוי מכל סוגי הנעילה האפשריים באלמנט נפחי. לבסוף, טנסור העיבור שבעזרתו תחושב האנרגיה הפנימית יהיה נתון ע"י הסכום של העיבור הקומפטיבילי המעודכן והעיבור המועשר

$$\tilde{\mathbf{E}} = \mathbf{E}^{comp} + \mathbf{E}^{enh}. \quad (8)$$

פונקציית אנרגיית העיבורים:

פונקציית אנרגיית העיבורים של פולימרים אלקטרו-אקטיביים ניתנת להפרדה למספר חלקים שיביאו בחשבון את ההתנהגות ההיפר-אילסטית, הויסקואילסטית, והצימוד האלקטרו-מיכאני

$$W = K(\tilde{J}^2 - 2 \ln(\tilde{J}) - 1) + \sum_{i=1}^3 c_i (\tilde{I}_i - 3)^i$$

$$+ \sum_{i=1}^{n_{max}} \frac{1}{2} \mu_i^v [\tilde{\mathbf{C}}' : \mathbf{A}_i - 3 - \ln(\det(\mathbf{A}_i))] \quad (9)$$

$$- \frac{\tilde{J}}{2} \varepsilon_0 \varepsilon_r \tilde{\mathbf{C}}^{-1} : (\mathbf{E} \otimes \mathbf{E}).$$

מדד הדיפורמציה שיבוא בפונקציית אנרגיית העיבורים הינו הטנסור המכונה ע"י right Cauchy-Green ונתון ע"י

$$\tilde{\mathbf{C}} = 2\tilde{\mathbf{E}} + \mathbf{I}. \quad (10)$$

שני האיברים הראשונים בביטוי פונקציית אנרגיית העיבורים (9) מתארים את התגובה ההיפראילסטית שהיא מתוארת בעזרת האיננואריואנטים $\tilde{J} = \sqrt{\det(\tilde{\mathbf{C}})}$ ו- $\tilde{I}_1 = \tilde{J}^{-2/3} \tilde{\mathbf{C}} : \mathbf{I}$

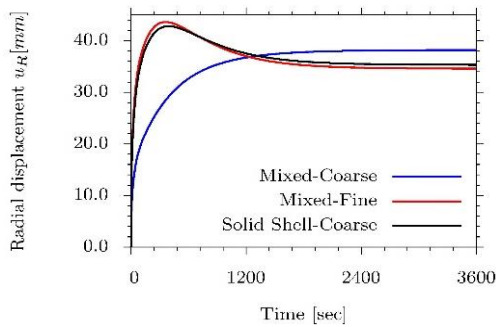
שהם מדדים לשינוי בנפח ושינוי בצורה, בהתאמה. מעבודתו של Lubliner (1985), האיבר השלישי בביטוי פונקציית אנרגיית העיבורים (9) מתאר את התגובה הויסקואלסטית של החומר. תגובה זו נשלטת ע"י משתנים שהם טנזוריים פנימיים שמתוארים ע"י משוואות האבולוציה הבאות

$$\dot{\mathbf{A}}_i = \frac{1}{\tau_i} (\tilde{\mathbf{C}}^{i-1} - \mathbf{A}_i), \quad (11)$$

כאשר $\{\mu_i^v, \tau_i^v\}$ הינם מקדמי חומר, אשר מבטאים את מקדם הגזירה הויסקואלסטית וזמן הרילקסציה של הענף ה-i במודל של מקסווייל. האיבר האחרון בביטוי פונקציית אנרגיית העיבורים (9) הוא החלק האחראי על הצימוד האלקטרו-מיכאני Jabareen 2015. בחלק זה וקטור ההזזה האלקטרי הינו קו-ליניארי עם וקטור השדה החשמלי.

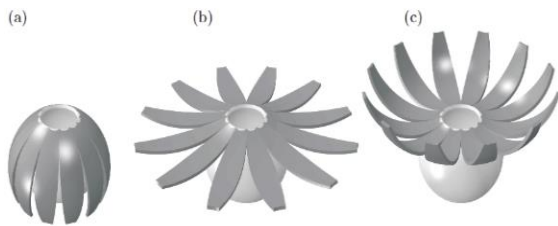
העיקרון הווריאציוני:

האנרגיה הפוטנציאלית הכוללת נתונה ע"י ההפרש בין האנרגיה הפוטנציאלית הפנימית והחיצונית, כאשר האנרגיה הפנימית מחושבת ע"י האינטגרציה של אנרגיית העיבורים (ליחידית נפח) על פני נפח האלמנט בקונפיגורציה הייחוס. בפרט,



איור 4: ההזזה הרדיאלית כפונקציה של הזמן.

התוצאות מראות, שהשימוש בפורמולציה המעורבת כאשר פותרים את הרשת הגסה מביא לתוצאות שגויות. בפרט, הפתרון אינו מראה את נקודת ההתהפכות, שבה ההזזה הרדיאלית מגיעה למקסימום, ואזי צופים בירידה. לעומת זאת, פתרון הרשת הגסה בעזרת פורמולציית ה Solid-shell -מראה אכן את נקודת ההתהפכות. איור 5 מציג את הדפורמציה של התפסן בשלוש נקודות זמן.



איור 5: הדפורמציות של התפסן בשלוש נקודות זמן, (a) הפתיחה של התפסן ב $t = 5[\text{sec}]$ (b) ההזזה הרדיאלית המקסימאלית ב- $t \approx 320[\text{sec}]$ (c) הדיפורמציה במצב סופי.

מסקנות:

עבודה זו מספקת כלי חישובי נומרי לפולימרים אלקטרו-אקטיביים, שבה פותחה פורמולציית אלמנטים סופיים אשר יכולה להעלים את הנעילה הנפחית של חומרים כמעט ובלתי דחיסים, בדומה לפולימרים, בנוסף לסוגי נעילה שונים אשר נצפים במשפיעלים בעלי עובי דק (Shell-like structures).

הבעת תודה:

מחקר זה נתמך ע"י הקרן הלאומית של המדע (1713/13). המחברים מבקשים להודות לקרן הלאומית למדע על תמיכתה הכספית הנדיבה.

מראי מקום:

Bar-Cohen, Y., (2001), "Electroactive polymers as artificial muscles - Reality and challenges." SPIE press, 1 edition.

Bishara, D. and Jabareen, M., "A reduced mixed finite element formulation for modeling the viscoelastic response of electroactive polymers at finite deformation," under review.

Jabareen, M. (2015), "On the Modeling of Electromechanical Coupling in Electroactive Polymers." Procedia IUTAM, vol. 12, pp.105-115.

Jabareen, M. and Mtanes, E. (2016), "A solid-shell Cosserat point element for elastic thin structures at finite deformation." Computational Mechanics, vol. 58, pp. 59-89.

Lublinter J., (1985), "A model of rubber viscoelasticity", Mechanics research communication, vol. 12, pp. 93-99.

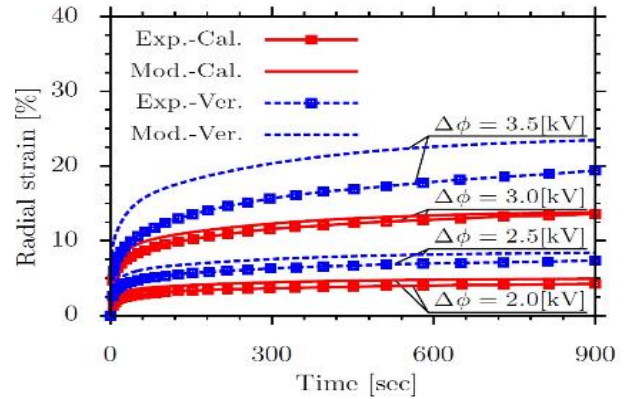
Simo, J. C., Armero F., Taylor, R.L., (1993), "Improved versions of assumed enhanced strain tri-linear elements for 3D finite deformation problems", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 110, pp. 359-386.

Wissler M.T., (2007) "Modeling Dielectric elastomer actuators". PhD Thesis, Swiss federal institute of technology in Zurich.

טבלה 1: מקדמי החומר הויסקו-אילסטיים.

	$\mu_i^v [MPa]$	$\tau_i^v [sec]$
1	5.8320E-02	6.2242E-01
2	2.0812E-02	1.4163E+01
3	1.2608E-02	1.9769E+02

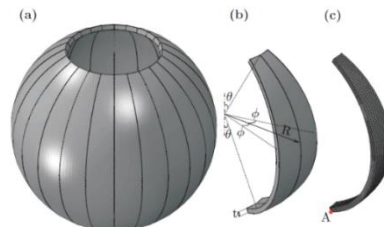
בכדי להראות את טיב הסט המתקבל, איור 2 מראה את תוצאות הניסויים המדודים והמחושבים לפי המודל.



איור 2: תוצאות הניסויים, המדודים והמחושבים מהמודל.

דוגמא נומרית:

תפסן כדורי: בדוגמא זו, נחקרה התגובה של תפסן העשוי מ-12 פלחים, כאשר כל פלח מוגדר ע"י הזווית $2\phi = 30^\circ$. התפסן עשוי משתי שכבות בעלות עובי זהה, כאשר הרדיוס של הספירה הינו $R=10mm$, העובי הכולל שלה הוא $t = 0.5mm$ וחתוכה בזווית של $\theta = 15^\circ$ (כמתואר באיור 3).



איור 3: הגיאומטריה של התפסן: (a) הספירה החתוכה הבנויה מ-12 פלח, (b) פלח בודד (c) חצי פלח.

החור העליון של הספירה רתום, והפתח התחתון חופשי לתזוזה. השכבה הפנימית של הספירה מועמסת בהפרש פוטנציאלים של 5 קילו-וולט, אשר מופעל ליניארית במשך 5 שניות, ואז מוחזק קבוע במשך כשעה עד לקבלת ההזזות במצב התמידי. ההזזה הרדיאלית של נקודת הקצה, אשר נמצאת על השכבה החיצונית של הספירה ומסומנת ב-A, חושבה כפונקציה של הזמן. לצורך חישוב זה, שתי רשתות נחקרו בדוגמא זו, כאשר חצי פלח נפתר עם רשת גסה ומעודנת. הרשת הגסה מוגדרת בעזרת 3 אלמנטים בכיוון ההיקפי, 2 אלמנטים דרך העובי, ו-20 אלמנט בכיוון המרידיאן. הרשת המעודנת מוגדרת ע"י 8 אלמנטים בכיוון ההיקפי, 4 אלמנטים דרך העובי, ו-112 אלמנט בכיוון המרידיאן. ההזזה הרדיאלית המחושבת מוראת באיור 4.