עלון

איגוד ישראלי לשיטות חישוביות במכניקה

אישחמ IACMM

Israel Association for Computational Methods in Mechanics

עלון האיגוד הישראלי לשיטות חישוביות במכניקה

פברואר 2020 מספר 42

מ-"שולחן העורך":

בספרו משנת 1979 "מדריך הטרמפיסט לגלקסיה" הסופר דגלאס אדאמס מתאר תרבות עתידנית הבונה מחשב-על הנקרא "מחשבה עמוקה" . המשימה היא לענות על השאלה: מה היא מהות החיים והמשמעות של הכל?. לאחר כ 7.5 מליון שנה של חישובים, כאשר התרבות המקורית אשר בנתה את מחשב-העל כבר נכחדה, המחשב מסיים את חישוביו ופולט את התשובה המתגלה כ 42. המחשב מציין שהתשובה חסרת משמעות כי מלכתחילה לא ידעו לנסח את השאלה בצורה הנכונה.

אז אתם מחזיקים בידכם את עלון מספר 42 של האיגוד הישראלי לשיטות חישוביות במכאניקה. וכמו בספרו המצויין של אדמס אנו יודעים שבתחום החישובי ניסוח נכון ומדוייק של השאלה יקבע האם לתשובה המתקבלת יש בכלל משמעות. כאשר מדובר בבעיות סבוכות כמו הבעיה המוצגת במאמר הקצר המופיע בהמשך העלון, ניסוח נכון של הבעיה לפעמים לא פחות מורכב מפתרונה.

זה גם המקום להודות למר רפי סלע ולמנחה שלו ד"ר יורי פלדמן על נכונותם לכתוב את המאמר המעניין המופיע בהמשך העלון.

כמו תמיד, אשמח לשמוע מכל אחד ואחת מחברי האיגוד בנוגע לתכנים אשר הם היו מעוניינים לראות מופיעים בעלון. אנא פנו אלי במייל בכל שאלה או הצעה.

אתם מוזמנים לבקר באתר האיגוד בו תמצאו מידע על האיגוד ועל מכאניקה חישובית בארץ ובעולם http://www.iacmm.org.il. באתר תוכלו לצרף עצמכם (ללא תשלום) לרשימת התפוצה האלקטרונית, להירשם כחברים באגוד או לחדש את חברותכם. טופס רישום לאיגוד ניתן למצוא ב http://www.iacmm.org.il/member.

עדכונים מיום העיון הקודם:

יום העיון ה-47 נערך ב-7 לנובמבר בפקולטה להנדסה של אוניברסיטת בן גוריון בנגב (המארגנים המקומיים היו ד"ר פבל טרפר וד"ר יורי פלדמן). המרצה האורח היה Prof. Alessandro Reali, Professor of Solid and Structural mechanics, Dean of the Department of Civil Engineering and Architecture, University of Pavia, Italy

שפתח את יום העיון עם הרצאה מעניינת מאד בנושא:

Isogeomteric analysis: Advanced modeling and applications with a special focus on shells and laminates

ISCM47 – פרופ' Reali **מעביר את הרצאת הפתיחה.**

יום העיון היה מוצלח ביותר וכלל עוד שלושה מושבי הרצאות של חוקרים וסטודנטים מהאקדמיה ומהתעשייה.

במסגרת תחרות ההרצאה המצטיינת לשנת 2019 בחרו השופטים להעניק את המקום הראשון למר רפי סלע על הרצאתו ביום העיון ה-47 ואת המקום השני לד"ר פאפדימיארופולוס על הרצאתו ביום העיון ה-46. ברכות לשני הזוכים. מר סלע שזכה במקום הראשון יקבל מימון של האיגוד להצגת עבודתו בכנס בינלאומי.

ISCM-48

יום העיון ה-48 יתקיים ב-26 למרץ 2020, בפקולטה להנדסה אזרחית וסביבתית של הטכניון (המארגנים המקומיים הם פרופ' מחמוד ג'אברין ופרופ' עודד אמיר). המרצה המוזמן הוא Prof. Sanjay Govindjee, Horace, Dorothy, and Katherin Johnson Professor in Engineering Civil and Environmental Engineering, University of California Berkeley, USA.

פרטים נוספים ניתן למצוא באתר האיגוד ובהודעות לתפוצה.

הרחבת שיטת שפה שקועה (Immersed Boundary) בלתי-מפורשת למחצה להדמיית זרימה בנוכחות גופים שקועים בעלי קינמטיקה מחזורית

רפי סלע, יורי פלדמן

הפקולטה להנדסה, המחלקה להנדסת מכונות, אוניברסיטת בן גוריון.

* כתובת אימייל לתגובות: rafise@post.bgu.ac.il

הקדמה

מאמר זה מציג מתודולוגיית "Immersed Boundary" (IB) חדשנית להדמיית זרימות בלתי-דחיסות בנוכחות גופים המבצעים תנועה מחזורית. תצורת זרימה זו נפוצה מאוד במגוון מערכות ביולוגיות, כגון חולייתנים ימיים ואורגניזמים תאיים שונים המסתמכים בהתניידותם על מנגנוני הנעה אנדולטוריים [1-5]; וכן ביישומים הנדסיים ותעשייתיים רבים, כדוגמת שחיינים סינתטיים [6-8] ומיקרו-מערבלים [9-12].

ניבוי מדויק של שדה הזרימה התלת-ממדי המתפתח סביב הגופים הנעים בתנועה מחזורית, כרוך בהדמיות שפה נעה (moving boundary simulations), בהן נפוץ השימוש ברשתות תואמות-גוף (body conformal) המאפשרות אכיפה ישירה של תנאי השפה עבור שדה המהירויות. שימוש בגישה זו כרוך ברישות חוזר באיכות גבוהה שיתמודד עם גאומטריית הגוף השקוע בכל צעד זמן חישובי. המורכבות ההולכת וגדלה של תצורת הגוף השקוע ביישומים הנדסיים מציאותיים, מאתגרת את יעילותן ויציבותן של השיטות המסורתיות המבוססות על רשתות תואמות-גוף.

חלופה מבטיחה לגישה המוזכרת לעיל היא שיטת Immersed Boundary אשר פותחה במקור על-ידי פסקין [13] והפכה לגישה נפוצה בהדמיות זרימה בנוכחות גופים שקועים, סטציונריים או נעים, בעלי גאומטריות מורכבות [14].

בין מגוון מתודולוגיות ה-IB הקיימות, המחקר הנוכחי מתמקד בגישת האכיפה הישירה הבלתי-מפורשת למחצה (semi-implicit direct forcing) שהוצגה לראשונה ב-[15]. מתודולוגיה זו פותחה במקור עבור גופים סטציונריים, ומהווה מימוש של גישת האכיפה הישירה שנוסחה לראשונה ע"י Mohd-Yusof [16] בגישה זו ערכי המהירות הרצויים נאכפים ישירות על שפת הגוף השקוע ללא צורך בתהליך דינאמי כלשהו. המימוש הבלתי-מפורש למחצה מאפשר אכיפה מדויקת של האילוצים הקינמטיים (עד כדי שגיאת דיסקרטיזציה של הסכמה הנומרית) תוך שמירה על האפיון האליפטי של משוואות NS, באופן שאינו מצריך שום שינוי בפועל של פותרן משוואות NS. בכך מהווה מימוש זה מעין פשרה בין המימוש המפורש המלא [14], [17-20] והבלתי-מפורש המלא [21-23] של גישת האכיפה הישירה.

במסגרת המחקר הנוכחי הורחבה השיטה להדמיית זרימה בנוכחות גופים נעים אשר תנועתם נשלטת ע"י פונקציות מחזוריות, ובשל כך ניתנת לתיאור ע"י אוסף סופי של מצבים בדידים. הרעיון הכללי העומד מאחורי המתודולוגיה הנוכחית הוא פירוק אנליטי של האופרטור המצמד בין משוואות NS ובין האילוצים הקינמטיים (אי-החלקה), וחישוב מקדים של התרומה המיוחסת לאילוצים הקינמטיים עבור כל אחד מאוסף המצבים הבדידים המרכיבים מחזור תנועה של הגוף השקוע. החישוב המקדים יכול להתבצע עבור כל אחד מהמצבים הבדידים בצורה בלתי-תלויה, כך שהמתודולוגיה מאפשרת מקבול טריוויאלי בציר הזמן.

במסגרת מאמר זה מודגם שימוש במתודולוגיה להדמיה זרימה תלת-ממדית המתפתחת בנוכחות כדור תונד בנפח סגור.

רקע תאורטי

יהי גוף שקוע אשר שפתו מתוארת פרמטרית ע"י $\mathbf{X}(\xi,\eta)$ ותנועתו מוכתבת ע"י קינמטיקה ידועה $\mathbf{U}^{\Gamma}(\mathbf{X})$. הזרימה הבלתי-דחיסה המתפתחת בנוכחות הגוף נשלטת ע"י משוואות הרציפות ושימור המומנטום (NS), אשר מנוסחות בצורתן האל-ממדית בקואורדינטות קרטזיות באופן הבא:

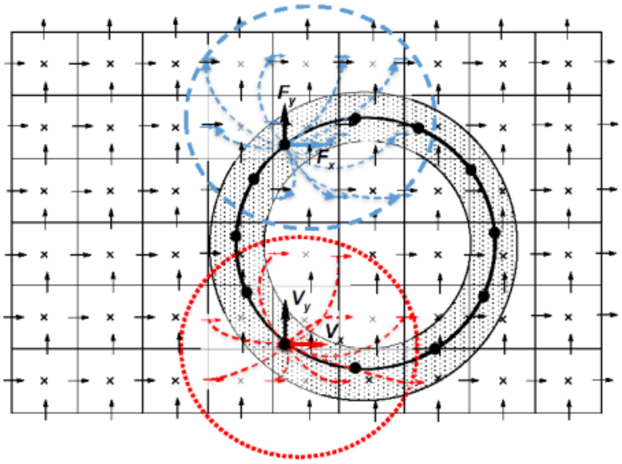
$$\nabla\cdot\mathbf{u}=0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t}+(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}=-\nabla p+\frac{1}{\mathrm{Re}}\nabla^2\mathbf{u}+\mathbf{f} \tag{2}$$

כאשר $\mathbf{u}(u,v,w)$, p ו-t הם המהירות, הלחץ והזמן האל-ממדיים בהתאמה ו-Re הוא מספר ריינולדס. צפיפות הכוח $f(x)$ במשוואה *(2)* משקפת את השפעת השפה הנעה על הזורם ובאופן כללי אינה ידועה. על כן יש להוסיף אילוץ קינמטי של אי-החלקה מהצורה:

$$\mathbf{u}(\mathbf{X})=\mathbf{U}^{\Gamma}(\mathbf{X}) \tag{3}$$

המספק סגירות למערכת המשוואות *(1)-(3)*. נבחין כי בעוד משוואות *(1)-(2)* מנוסחות עבור רשת קרטזית, משוואה *(3)* תקפה בתחום (X) המייצג את שפת הגוף השקוע. בהתאם לניסוח *Immersed Boundary*, שפת הגוף השקוע מוגדרת על-ידי אוסף נקודות לגראנז'יות, בעוד שכל המשתנים המיוחסים לנקודות אלה נקראים משתנים לגראנז'יים ומצוינים באות גדולה. מיקום הנקודות הלגראנז'יות אינו בהכרח מתלכד עם צמתי הרשת הקרטזית (אוילרית) המאחסנת את המשתנים המיוחסים לזורם (רכיבי המהירות והלחץ) כמתואר באיור 1.



איור 1 : תיאור סכמטי של העקרונות הבסיסיים של שיטת Immersed Boundary

לצורך החלפת האינפורמציה בין הרשתות מוגדרים שני אופרטורים צמודים כדלהלן:

$$I\left(u\left(x_i\right)\right)=\int_{\Omega}\left(u\left(x_i\right)\right)\cdot\delta\left(\boldsymbol{X}_k-x_i\right)dV_{\Omega_i} \qquad (4)$$

$$\boldsymbol{R}\left(\boldsymbol{F}_k\left(\boldsymbol{X}_k\right)\right)=\int_{S}\left(\boldsymbol{F}_k\left(\boldsymbol{X}_k\right)\right)\cdot\delta\left(x_i-\boldsymbol{X}_k\right)dV_{S_k} \qquad (5)$$

כאשר אופרטור הרגולריזציה $\boldsymbol{R}$ מעביר מידע מהנקודות הלגראנז'יות לרשת האוילרית, ואופרטור האינטרפולציה $\boldsymbol{I}$ מבצע אינטרפולציה של שדות המהירות מהרשת האוילרית אל הנקודות הלגראנז'יות המתארות את שפת הגוף המוטבע. האות S מסמלת את כל התאים השייכים לשפת הגוף השקוע, האות Ω מסמלת את כל התאים של הרשת האוילרית הנמצאים בשכנות לשפת הגוף, dV_S^k מתייחס לנפח וירטואלי המקיף את הנקודה הלגראנז'ית k , ו- dV_{Ω_i} מתייחס לנפח התא של הרשת האוילרת. שני האופרטורים מבוססים על פונקציית *Dirac* בדידה הניתנת ל"הינדוס" לצורך קביעת תחום ההשפעה שלהם [24].

בהתאם לאלגוריתם SIMPLE [25], מערכת המשוואות *(1)*-*(3)* לאחר הטמעת פורמליזם *IB* מתורגמות לאוסף המשוואות הדיסקרטיות הבאות:

$$\frac{1}{\mathrm{Re}}\boldsymbol{L}\left(\boldsymbol{u}^*\right)-\frac{3\boldsymbol{u}^*}{2\Delta t}+\boldsymbol{R}\left(\boldsymbol{F}_k\left(\boldsymbol{X}_k\right)\right)=\frac{-4\boldsymbol{u}^n+\boldsymbol{u}^{n-1}}{2\Delta t}+\boldsymbol{N}\left(\boldsymbol{u}^n\right)+\nabla p^n \qquad (6)$$

$$\boldsymbol{I}\left(\boldsymbol{u}^*\left(x_i\right)\right)=\boldsymbol{U}^{\Gamma}\left(\boldsymbol{X}_k\right) \qquad (7)$$

$$\Delta\left(\delta p\right)=\frac{3}{2\Delta t}\cdot\boldsymbol{u}^* \qquad (8)$$

$$\boldsymbol{u}^{n+1}=\boldsymbol{u}^*-\frac{2\Delta t}{3}\nabla\left(\delta p\right),\qquad p^{n+1}=p^n+\delta p \qquad (9)$$

כאשר דיסקרטיזציה בזמן נעשתה על-ידי הפרש אחורי מסדר שני, ודיסקרטיזציה במרחב נעשתה באמצעות שיטת נפחים סופיים מסדר שני. אופרטורים $\boldsymbol{N}$ ו- $\boldsymbol{L}$ מתארים את האיברים הלא-ליניאריים והליניאריים, בהתאמה, של משוואות NS. איבר הלחץ במשוואה *(6)* נלקח מצעד הזמן הקודם. הפתרון מתקבל תחילה עבור מהירות ביניים $\boldsymbol{u}^*$, ולאחר מכן על-ידי פתרון משוואת פואסון *(8)* מתקבל שדה תיקוני הלחץ אשר משמש לחישוב סופי של שדה לחצים ומהירויות בצעד הזמן הבא על-ידי הצבה למשוואות *(9)*. את משוואות *(6)*-*(7)* ניתן לכתוב בצורה קומפקטית כמטריצת בלוקים כדלהלן:

$$\begin{bmatrix}\overbrace{\frac{1}{\mathrm{Re}}\boldsymbol{L}-\frac{3}{2\Delta t}\mathbf{I}}^{H} & \boldsymbol{R}\\ \boldsymbol{I} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{u}^*\\ \boldsymbol{F}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}RHS^{n-1,n}\\ \boldsymbol{U}^{\Gamma}\end{bmatrix} \qquad (10)$$

ולאחר שימוש בפירוק בגישת *Schur complement* ניתן לחלץ את שני הקשרים האנליטיים הבאים:

$$\boldsymbol{F}=\left[\boldsymbol{IH}^{-1}\boldsymbol{R}\right]^{-1}\left[\boldsymbol{IH}^{-1}RHS^{n-1,n}-\boldsymbol{U}^{\Gamma}\right] \qquad (11)$$

$$\boldsymbol{u}^*=\boldsymbol{H}^{-1}\left[RHS^{n-1,n}-\boldsymbol{RF}\right] \qquad (12)$$

הפתרון מתבצע בשני שלבים כאשר בשלב הראשון פותרים את *(11)* למציאת כופל הלגראנז' $\boldsymbol{F}$ ולאחר מכן את *(12)* למציאת שדה מהירות הביניים $\boldsymbol{u}^*$.

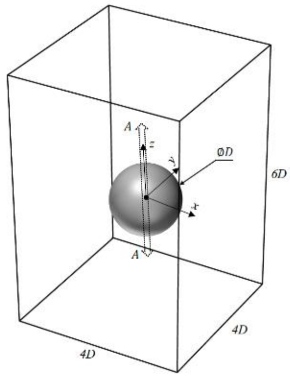
<u>פרטי מימוש ומתודולוגיה ייחודית לגופים שקועים המבצעים תנועה מחזורית</u>

השלבים השונים באלגוריתם יושמו לאור מספר עובדות מרכזיות:

המכפלה $\boldsymbol{H}^{-1}v$ (כאשר v הוא כל וקטור גנרי) ניתנת ליישום על-ידי ניצול של כל פותרן קיים מבוסס SIMPLE של משוואות NS, $[\boldsymbol{H}_u][\boldsymbol{u}]=[RHS_{\boldsymbol{u}}]$, כקופסה שחורה; המטריצות $\boldsymbol{I}$ ו- $\boldsymbol{R}$ המייצגות את אופרטור האינטרפולציה והרגולריזציה בהתאמה הן מטריצות דלילות במיוחד ולכן ניתנות לשמירה בפורמט דחיס (CSR) והמכפלה שלהם בווקטור כלשהו מתבצעת על-ידי שימוש ברוטינות סטנדרטיות מספריית Intel Math Kernel Library (MKL); החישוב מתייחס לגופים שקועים בעלי קינמטיקה מחזורית – עובדה אשר מאפשרת לנו לכלול במתודולוגיה שלב חישוב מקדים בו מחזור התנועה של הגוף מחולק למספר שלם של צעדי זמן הנשנים באופן ציקלי, כך שעבור כל אחד מהצעדים המרכיבים מחזור תנועה בודד יכולים להתבצע במקביל: חישוב של המטריצה $\left[\boldsymbol{IH}^{-1}\boldsymbol{R}\right]$, פירוק LU ושמירת הפקטורים בדיסק. כתיבה לדיסק וקריאה ממנו מתבצעת בצורה יעילה תוך ניצול יתרונותיה של מערכת קבצים כללית ממוקבלת (GPFS).

<u>תוצאות ודיון</u>

במסגרת המאמר נבחנה תצורת זרימה של ספרה בקוטר D התונדת בתוך נוזל התחום בפריזמה מלבנית בממדים $4D\times4D\times6D$, כמתואר באיור 2.

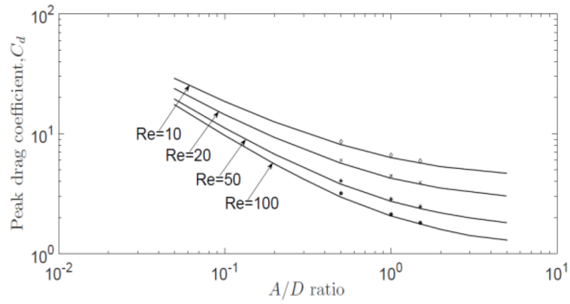


איור 2: תיאור סכמתי של המודל הפיסיקאלי

קינמטיקת הספרה נשלטת ע"י המשוואות האל-מימדיות הבאות:

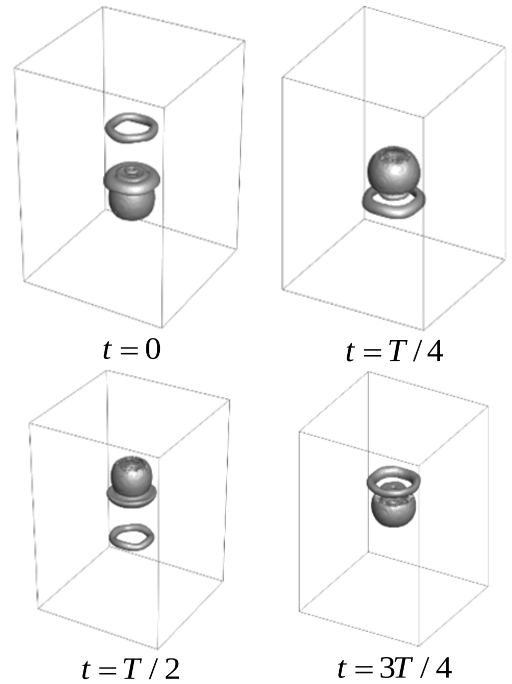
$$u_z = \sin\left(\frac{D}{A}t\right),\ z = -\frac{A}{D}\cos\left(\frac{D}{A}t\right) \quad (13)$$

כאשר A/D הוא היחס בין אמפליטודות התנודות לקוטר הספרה. כחלק מתהליך התיקוף של המתודולוגיה המפותחת הושוו ערכים מחושבים של מקדם הגרר המקסימאלי של הספרה, עבור ערכי A/D ו-Re שונים, עם הערכים המתאימים כפי שדווחו ב-[26].



איור 3: השוואת מקדמי גרר מחושבים לתוצאות ידועות מהספרות [26]

הסטייה המקסימאלית שנצפתה בין הערכים המחושבים והתוצאות הספרותיות היא של פחות מ-6%. בנוסף בוצעה ויזואליזציה של מבני הערבולים המתפתחים בחלקים שונים של מסלול הספרה ע"י שימוש בקריטריון $\lambda_2 = -0.1$ [27] כמתואר באיור 4.



איור 4: ויזואליזציה של הערבולים המתפתחים לאורך מחזור התנודות של הספירה עבור Re=300

ניתן להיווכח כי בשל אינרציית הזורם, המבנים הערבוליים הטבעתיים נוצרים בנקודות הגבוהות והנמוכות ביותר במסלול הספרה, ולאחר מכן מושלים ממעטפתה ומתקדמים לאורך התחום החישובי.

<u>מסקנות</u>

במסגרת המאמר הנוכחי הוצגה מתודולוגיה חדשנית לסימולציית זרימה בנוכחות גופים הנעים בצורה מחזורית. המתודולוגיה שפותחה מבוססת על שיטת IB בלתי מפורשת למחצה, כאשר האופי המחזורי של תנועת הגוף השקוע מנוצל לטובת שלב חישוב מקדים המתבצע במקביל עבור אוסף סופי של תצורות שפה נשנות. המתודולוגיה הנומרית החדשה יושמה בהדמיית זרימה בלתי-דחיסה המפתחת בנוכחות כדור תונד בנפח סגור. נמצאה התאמה טובה בין תוצאות המחקר והתוצאות הידועות מספרות. האופי הגנרי של המתודולוגיה שפותחה מאפשר לממשה בקלות בכל פותרן משוואות NS קיים המבוסס על אלגוריתם SIMPLE.

<u>מקורות</u>

1. S. Lauder, E. Tytell, Fish Biomechanics (Fish Physiology) 23 (2006) 425-468.
2. D. Bray, Garland Sciencem, New York, 1998.
3. J. Lighthill, SIAM, Philadelphia, 1975.
4. C. Brennen, H. Winet, Ann. Rev. Fluid Mech. 9(1) (1977) 339-398.
5. E. Lauga, T. Powers, Rep. Prog. Phys. 72 (2009) 096601.
6. S. Ebbens, T. Howse, Soft Matter 6 (2010) 726-738.
7. W. Wang, S. Duan, S. Ahmed, T. Mallouk, A. Sen, Nano Today 8 (2013) 531-554.
8. F. Nadal, E. Lauga, Phys. Fluids 26 (2014) 082001.
9. L. Lu, K. Ryu, C. Liu, J. Electromech.Syst. 11(5) (2002) 462-469.
10. Y. Huh, T. Park, E. Lee, W. Hong, S. Lee, Electrophoresis 29(14) (2008) 2960-2969.
11. L. Capretto, W. Cheng, M. Hill, X. Zhang, Topics in current chemistry 304 (2011) 27-68.
12. R. Shamsoddini, M. Sefid, R. Fatehi, Eng. Applicat. Comput. Fluid Mech. 8(2) (2014) 289-298.
13. C. S. Peskin, J. Comput. Phys. 10 (1972) 252-271.
14. R. Mittal, G. Iaccarino, Ann. Rev. Fluid Mech. 37 (2005) 239-261.
15. Y. Feldman, Int. J. Heat Mass Transf 127 (2018) 1267-1283.
16. J. Mohd-Yusof, Center for Turbulence Research, Annual Research Briefs (1997), 317-327
17. H. S. Yoon, D. H. Yu, M. Y. Ha, Y. G. Park, Int. J. Heat Mass Tranfer 53 (2010) 3143-3155.
18. W. W. Ren, C. Shu, W. M., Yang, Comput. Fluid. 57 (2012) 40-51.
19. W. Ren, C. Su, W. Y., Int. J. Heat and Mass Transfer 64 (2013) 694-705.
20. Y. Gulberg, Y. Feldman, Int. J. Heat and Mass transfer 91 (2015) 908-921. R. Glowinski, T. Pan, J. Periaux, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg 15, (1998) 181-194.
21. Z. Yu, N., Phan-Thien, Y. Fan, R. Tanner, J. Non-Newtonian Fluid Mech. 104 (2002) 87-124.
22. Z. Yu, N., Phan-Thien, Y. Fan, R. Tanner, J. Fluid Mech. 518 (2004) 61-93.
23. A. Roma, C. S. Peskin, M. J. Berger, J. Comput. Phys., 153 (1999) 509-534.
24. S. V. Patankar, D. B. Spalding, Int. J. Heat Mass Transf. 15 (1972) 1787-1806.