

עלון האיגוד הישראלי לשיטות חישוביות במכניקה

מספר 43

פברואר 2022

עורך: אלעד פריאל, המחלקה להנדסת מכונות, המכללה האקדמית להנדסה סמי שמעון, באר-שבע 84100, טל. 6475884 (08), דואר אלקטרוני: eladp@sce.ac.il

חברי ועד אישח"מ: מיכאל אנגלמן, סלבה קרילוב, אלעד פריאל, פנחס בר-יוסף, דן גבעולי, יצחק הררי, עמיאל הרשגה, יונתן טל (אחראי האתר), מחמוד ג'בארין (נשיא), ארז גל (מזכיר-גזבר)

איש-קשר עם ECCOMAS: מישל ברקובייר

ועדת ביקורת: יורי פלדמן, מרדכי סנטו

אתר אישח"מ (IACMM) באינטרנט: <http://www.iacmm.org.il>

רישום לחברות באגוד ופרטים נוספים: באתר האיגוד הנ"ל, או פנו למזכיר-גזבר, פרופ' ארז גל, טל. 08-6479671, דואר אלקטרוני: erezgal@bgu.ac.il

מ-"שולחן העורך":

יום העיון היה מוצלח ביותר וכלל עוד שני מושבי הרצאות של חוקרים וסטודנטים מהאקדמיה ומהתעשייה. בנוסף, בסוף היום התקיימה סדנה בנושא חידושים בשיטת ה immersed boundary method שהועברה על ידי ד"ר יורי פלדמן מאוניברסיטת בן גוריון בנגב.

בנוסף, במסגרת יום העיון, הוענקו תעודות לזוכים בתחרות ההרצאה המצטיינת בימי העיון ה 46-47. ברכות למר רפי סלע וד"ר פאפדימיארופולוס על הזכייה.

במסגרת תחרות ההרצאה המצטיינת לימי העיון ה 48-49 נבחרה הרצאתו של ד"ר אדר כהנא כהרצאה המצטיינת של יום העיון ה 48.



ISCM48 – חברי הוועד המנהל של האיגוד ביחד עם המארחים של יום העיון: מימין לשמאל, ד"ר אלעד פריאל, פרופ' מחמוד ג'בארין, פרופ' שאול מרקוביץ (המרצה המוזמן), פרופ' עודד אמיר, פרופ' פנחס בר יוסף, יונתן טל, פרופ' דן גבעולי.

ISCM-49

יום העיון ה-49 יתקיים ב-24 למרץ 2022, במחלקה להנדסת מכונות במכללה להנדסה ע"ש סמי שמעון בבאר שבע (המארגנים המקומיים הם ד"ר אלעד פריאל וד"ר ניר טרבליס). המרצה המוזמן הוא **Prof. Sanjay Govindjee**, Horace, Dorothy, and Katherin Johnson Professor in Engineering Civil and

וירוס הקרוונה, שעדיין איתנו, השפיע על פעילויות האיגוד בשנתיים האחרונות. עם זאת, לאט ובזהירות, אנו חוזרים לשגרה. אני מאחל לכם ולבני משפחותיכם בריאות איתנה.

מאז פרסום העלון הקודם התקיימו מספר חילופי תפקידים בוועד המנהל של האיגוד. פרופ' זהר יוסיבאש ופרופ' סלבה קרילוב בחרו לסיים את תפקידם כנשיא האיגוד וכמזכיר-גזבר בהתאמה. נבחרו להחליפם פרופ' מחמוד ג'בארין כנשיא האיגוד ופרופ' ארז גל כמזכיר-גזבר. זה המקום להודות לפרופ' יוסיבאש ופרופ' קרילוב על שנים רבות של הובלה מוצלחת של האיגוד. נאחל הצלחה רבה לפרופ' ג'בארין ופרופ' גל בתפקידם החדש.

אני רוצה להודות לד"ר אדר כהנא על נכונותו לכתוב את המאמר המופיע בהמשך העלון. כמו תמיד, אשמח לשמוע מכל אחד ואחת מחברי האיגוד בנוגע לתכנים אשר הם היו מעוניינים לראות מופיעים בעלון. אנא פנו אלי במייל בכל שאלה או הצעה.

אתם מוזמנים לבקר באתר האיגוד בו תמצאו מידע על האיגוד ועל מכניקה חישובית בארץ ובעולם <http://www.iacmm.org.il>. באתר תוכלו לצרף עצמכם (ללא תשלום) לרשימת התפוצה האלקטרונית, להירשם

כחברים באגוד או לחדש את חברותכם. טופס רישום לאיגוד ניתן למצוא ב <http://www.iacmm.org.il/member>

עדכונים מיום העיון הקודם:

יום העיון ה-48 התקיים ב-11 לנובמבר בטכניון, בפקולטה להנדסה אזרחית וסביבתית (המארגנים המקומיים היו פרופ' עודד אמיר ופרופ' מחמוד ג'בארין). המרצה האורח היה פרופ' שאול מרקוביץ מהמחלקה למדעי המחשב בטכניון שפתח את יום העיון עם הרצאה מעניינת מאד בנושא:

Are general-purpose robots coming soon?

בלמידה עמוקה בלבד או היפוך זמן בלבד) ונראה שהן כושלות
בעייה זו והשיטה המוצעת אכן מחזירה תוצאות מדויקות.

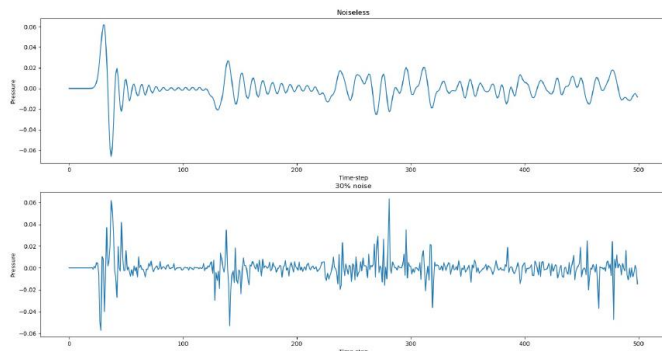
פיתוח נומרי

הבעיה אותה נחקור היא בעיית התפשטות גלים והנוסחה
המתמטית המתארת בעיה זו נתונה על ידי:

$$\begin{cases} \ddot{u}(\vec{x}, t) = \nabla \cdot (c^2(\vec{x}) \nabla u(\vec{x}, t)) & \vec{x} \in \Omega, t \in (0, T) \\ u(\vec{x}, 0) = u_0(\vec{x}) & \vec{x} \in \Omega \\ \dot{u}(\vec{x}, 0) = v_0(\vec{x}) & \vec{x} \in \Omega \\ u(\vec{x}, t) = f(\vec{x}, t) & \vec{x} \in \partial\Omega_1, t \in [0, T] \\ \frac{\partial u}{\partial n}(\vec{x}, t) = g(\vec{x}, t) & \vec{x} \in \partial\Omega_2, t \in [0, T] \end{cases} \quad \partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2 = \partial\Omega$$

כאשר $u(\vec{x}, t)$ היא עוצמת הגל או הלחץ האקוסטי. עבור תנאי
התחלה (u_0, v_0) ושפה (f, g) מסוג דיריכלה או נוימן (בהתאמה)
הבעיה מוצגת היטב. החיישנים ממוקמים בנקודות מסוימות בתחום
כאשר $\{(x_k, y_k)\}_{k=1}^{N_{sensors}}$ מספר החיישנים ובדרך
כלל יהיו 8 חיישנים. ההקלטות בחיישנים הן בעצם הלחצים
האקוסטיים (הערכים של הפונקציה $u(\vec{x}, t)$) בנקודות שבהן
ממוקמים החיישנים בלבד.

כדי לפתור את משוואת הגלים ולחשב את הלחץ האקוסטי בחיישנים
אנו משתמשים בשיטת ההפרשים הסופיים, ספציפית הפרשים
מרכזיים, בזמן ובמרחב. נגדיר רשת בגודל $N_x \times N_y$ נציין תנאי
שפה הומוגני מסוג דיריכלה על השפה החיצונית ונפתור את
המשוואה עבור הנקודות על הרשת בתוך התחום. חיישן הוא נקודה
ממספר הנקודות על הרשת. המרחקים בין שתי נקודות ברשת
קבועים ונתונים על ידי $\Delta x, \Delta y$ (רשת אחידה) והמרווחים בזמן
נקבעו כך שמספקים את תנאי Courant-Friedrichs-Lewy. לכל
תנאי התחלה נתון אנו פותרים את המשוואה בעזרת שיטה נומרית
זו עבור N_{steps} צעדי זמן ושומרים את הלחצים האקוסטיים שהוקלטו
בחיישנים. אנו מקבלים מטריצה בגודל $N_{steps} \times N_{sensors}$ המכילה
את המידע הסינתטי מהחיישנים בכל נקודת זמן. לאחר מכן, אנו
מרעישים את ההקלטות בחיישנים על ידי רעש בעל התפלגות
נורמלית ומכפיל את האות: $\{u(t_n, x_k, y_k)\}$.
 $\mathcal{N}(0, \sigma^2)_{n=1, k=1}^{N_{steps}, N_{sensors}}$ בחרנו בהרעשה מסוג זה כי כמות הרעש
היא יחסית לעוצמת האות ויכולה להיות מאוד גבוהה. בנוסף, רעש
זה משמעותית קשה יותר לניקוי בשל היותו לא לינארי. בחנו את
השיטה גם עם רעש מתוסף ורעש בעל התפלגות אחיד והתוצאות
טובות משמעותית. המקרה של רעש מוכפל בעל התפלגות נורמלית
מתגבר במיוחד. דוגמה לאות נקי ואת מורעש בחיישן מוצגת באיור
1.



איור 1 – מידע המוקלט בחיישן, באיור העליון ללא רעש
ובתחתון עם 30% רעש

כעת, ננסח את הבעיה שלנו כבעיית מסד נתונים (דאטה). כאשר
אנו בוחרים נקודה מסוימת על הרשת להיות המיקום של המקור,
אנו מחשבים את ההקלטות בחיישנים כפי שתואר מעלה. נעשה
זאת לכל בחירה שרירותית של מקור וכל אחת כזו תיקרא דגימה.

מודל מבוסס למידה עמוקה מודעת פיזיקלית עבור מציאת מקור מתוך מידע דליל רועש במיוחד מחיישנים

דר' אדר כהנא¹, פרופ' אלי טורקלי¹, פרופ' שי דקל ופרופ' דן
גבעולי²

¹הפקולטה למתמטיקה, אוניברסיטת תל אביב
²הפקולטה להנדסת אווירונאוטיקה וחלל, טכניון

רקע

אנו מעוניינים לאתר מקור שידור הפולט את אקוסטי בתוך תת-ימי.
לבעיה זו מגוון שימושים והיא נפוצה בתחומים כגון אקוסטיקה,
גאופיזיקה, בחינת חומרים (כולל בחינות אי-הרסניות) ועוד [1,3].
בניסוי פיזיקלי טיפוסי משודר גל אקוסטי מהמקור, הגל מתפשט
בתוך ומספר חיישנים הממוקמים בתוך מקליטים את הלחץ
האקוסטי לאורך זמן. אנו מעוניינים, בעזרת המידע שהוקלט
בחיישנים, לאתר את המקור. מספר החיישנים קטן משמעותית
מגודל התחום ומידע זה בלבד זמין לנו לאנליזה. בעיה זו אינה
מוצגת היטב, כלומר לא בהכרח קיים לה פתרון ואם קיים הוא לא
בהכרח יחיד. נושא זה מקשה על מציאת הפתרון לבעיה, במיוחד
כאשר ההקלטות בחיישנים מכילות בנוסף לאות, רעש מדידה כבד.
לכן, אנו מעוניינים למצוא אך ורק את מיקום המקור השידור (ולא את
צורת השידור המלאה, כלומר האות ההתחלתי בכל התחום).
בעבודה זו אנו יוצרים מידע מלאכותי של הקלטות בחיישנים ומדמים
ניסוי פיזיקלי של התקדמות אות בתוך תת-ימי.

שיטה פופולרית לאיתור מקורות מתוך ההקלטות הינה שיטת היפוך
הזמן [2,4]. בשיטה זו אנחנו משתמשים בסכמה נומרית לקירוב
פתרון משוואת הגלים (המתארת את התפשטות גל אקוסטי בתוך
תת-ימי) ופותרים אותה "אחורה בזמן" כדי לשחזר את האות
ההתחלתי בתחום, ובכך למצוא את מיקום התחלת ההתפשטות. על
מנת לזהות את המקור עצמו מתוך שחזור האות בדרך כלל נצטרך
לבנות פונקציית מחיר מתוחכמת וככל שהמחיר נמוך יותר, שם
נמצא המקור. יתרון של שיטה זו הוא עמידות ברעשי מדידה. אחד
החסרונות של שיטה זו הוא שמספר מצומצם של חיישנים גורר
ביצועים פחותים.

השימוש בשיטות מבוססות למידת מכונה צובר תאוצה בקרב קהילת
החוקרים במתמטיקה השימושית. מודלים מבוססי למידת מכונה
מכוונים להתאים קלט מסוים לפלט המתאים לו. לשיטות אלו
יתרונות רבים כגון היכולת להתמודד עם בעיות לא-לינאריות, תמיכה
במגוון סוגים והגדרות של בעיות והתכנסות מהירה (ביחס לשיטות
אופטימליות). חסרון משמעותי של שיטה זו הוא רגישות גבוהה
לשונות בקלט. למשל, מסוגל מכוניות ככל הנראה יכשל בלסוג
משאית למרות הדמיון בין כלי הרכב. שימוש בלמידת מכונה לבעיות
בתחום המשוואות הדיפרנציאליות מאתגר בעיקר בגלל שרוב
התרחישים מכילים מידע רועש.

הקדמה

אנו מציעים שיטה מבוססת למידה-עמוקה ושיטת היפוך הזמן
שלמרות רעשי המדידה הגבוהים, מצליחה לאתר מקורות בדיוק
גבוה. השיטה מבוססת על 4 שלבים:

1. שיערוך רמת הרעש במדידה.
2. פתרון "אחורה בזמן" של משוואת הגלים.
3. שיפור איכות התמונה המתקבלת בעזרת למידה-עמוקה.
4. פונקציית מטרה מודעת פיזיקלית (Physically-Informed loss function).

החשובים בעבודה זו בוצעו ב-דו-מימד אך ניתן להכליל שיטה זו
לתלת-מימד. בעבודה זו נבחן גם מקרים נוספים שלהם מתאימה
שיטה זו ונראה איך ניתן להכליל אותה למגוון ניסויים פיזיקליים
מעניינים. בנוסף, נשווה את התוצאות לשיטות נאיביות (שימוש

לפונקציית מטרה. בסיום האימון המשקולות נשמרות והמודל משתמש בהן להסקת הפלט למדידות חדשות.

אלמנט נוסף הוא שימוש בפונקציות לא-ליניאריות בין שכבות הקונבולוציה. אנו משתמשים בפונקציית *Rectified Linear Unit* שמבצעת $x \rightarrow \max(0, x)$. בכך אנו מנצלים את החוזקה של מודל הלמידה העמוקה ללמוד בעיות לא ליניאריות. בשכבה האחרונה בפונקציית *sigmoid* המבצעת $x \rightarrow \frac{1}{1+e^{-x}}$. פונקציה זו מחדדת את הפלט להיות קרוב יותר לבינארי בדומה לתמך הקומפקטי אנו רוצים. פונקציית המטרה שנשתמש בה כאן היא *Negative Log-Likelihood* הפופולרית לבעיות מסוג זה.

החלק הרביעי והאחרון מתאר שיפור של פונקציית המטרה והפיכת התהליך ל"מודע" לבעיה הפיזיקלית שהוא פותר. הפלט של החלק השלישי הוא שחזור של תמונת המקור, אותה אנו משווים תוך כדי אימון לתמונות המקור האמיתיות מסט הדגימות. בהינתן תמונת מקור, אנו יכולים להשתמש בשיטת ההפרשים הסופיים כדי לפתור את תהיך ההלוך בזמן ולחשב את ההקלטות בחיישנים. אנו מבצעים חישוב זה פעם עבור תמונת השחזור ופעם עבור תמונת המקור המקורית. אם השחזור מושלם, אנו מצפים להקלטות זהות בחיישנים. אמנם, השחזור לא מושלם, אך אנו יכולים להשתמש בהשוואה בין ההקלטות של החיישנים כשיטת ענישה בתהליך האופטימיזציה. אנו מחשבים:

$$PI = \frac{1}{N_{sample} \cdot N_{steps} \cdot N_{sensors}} \sqrt{\sum_{q=1}^{N_{samples}} \sum_{n=1}^{N_{steps}} \sum_{k=1}^{N_{sensors}} |u(t_n, x_k, y_k) - \hat{u}(t_n, x_k, y_k)|^2}$$

אנו מוסיפים רכיב זה לפונקציית המטרה וכעת מודל הלמידה מנסה ללמוד משקולות שיביאו לערך מינימלי של פונקציית המטרה המורכבת גם משחזור המקור (*NLL*) וגם מההקלטות המחושבות

אנו מייצרים מקבץ (ט) גדול של דגימות, בגודל $N_{samples} \times N_{steps} \times N_{sensors}$. מקבץ זה יהיה מידע הקלט של השיטה. המטרה של חלק הלמידה העמוקה בשיטה היא להתאים את מידע הקלט למידע הפלט הרצוי. במקרה שלנו, מידע הפלט הוא מיקום המקור הבא לידי ביטוי בתנאי ההתחלה. אנו מעוניינים במיקום המקור בלבד ולכן נגדיר את המקור כתמך קומפקטי בתוך התחום, כך שכל נקודה על הרשת בתוך התמך תהיה בעלת הערך 1 והשאר 0. ניתן לראות דוגמה באיור 2 עבור 0% רעש (בשורה העליונה) באיור הימני ביותר של (a) ושל (b). נרצה שהשיטה תשחזר תמונות של התחום עם תמך המתאים למקור האמיתי, וזה יהיה הפלט שנבנה על מנת לאמן את המודל. לכן, הפלט יהיה מקבץ מידע בגודל $N_{samples} \times N_x \times N_y$. לכל דגימה יש קלט ופלט מתאימים.

פיתוח מבוסס למידה עמוקה

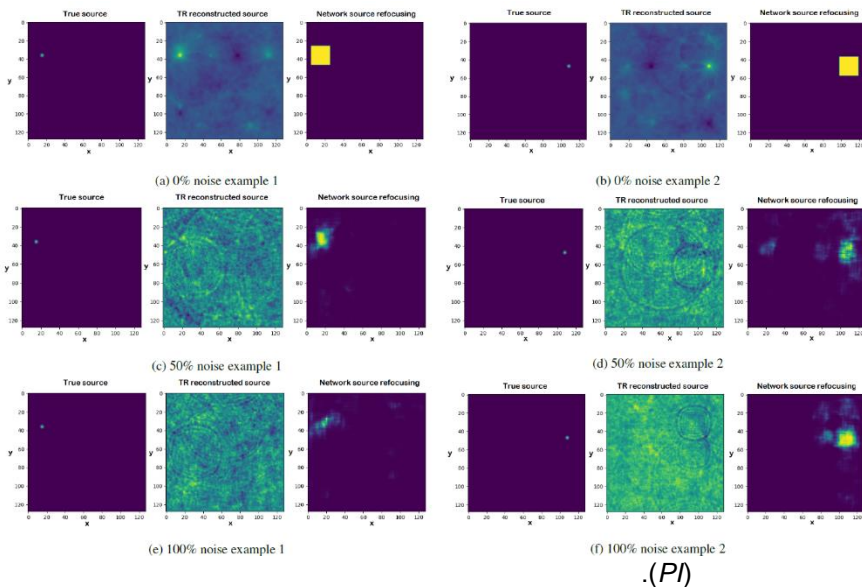
כעת נתאר את ארבעת השלבים שצוינו קודם לכן ומהם מורכבת השיטה. על מנת לדון בחלק הראשון, נציין שאחת המגבלות של שיטות מבוססות למידה עמוקה היא שמודלים אלו מותאמים לבעיה ספציפית של קלט ופלט מסוימים. כאשר מקבץ הקלטים מגוון מדי, מודלים אלו מתקשים למצוא התאמה בין הקלט לפלט ועלולים לא להתכנס כלל. נרצה לפרק את הבעיה שלנו לתתי בעיות על מנת ליצור מודל מבוסס למידה עמוקה לכל תת בעיה.

אנו מתמקדים ברעש מוכפל המתפלג נורמלית $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$. הרעיון המוצע הוא לחלק את הדאטה לדגימות לפי התפלגות הרעש המשנתה לפי σ . נבצע חלוקה וניצור מקבץ של דגימות סביב כל ערך של σ בחלוקה, ואז נאמן מודל למידה עמוקה עבור כל מקבץ דגימות שכזה בנפרד. בגלל שבכל מקבץ שכזה המדידות עם אותה רמת רעש ויחסית דומות, מודל הלמידה מתכנס.

החלק הראשון בשיטה מתאר בניית מודל למידה עמוקה שתפקידו הוא, עבור קלט של הקלטות מהחיישנים, לשחזר את פרמטר σ שבעזרתו הורעשו ההקלטות. לפי הפרמטר ששוחזר, המדידה תישלח למודל הלמידה המתאים על מנת לשחזר את המקור מתוך הדגימות. זהו מאין שער ראשוני אותו עוברת הדגימה, ועל ידי המעבר בשער זה אנו מבטיחים שהמדידה חדשה (שהפלט שלה לא ידוע) תקבל פלט חזוי ממודל למידה עמוקה שהתאמן על מדידות דומות לה.

החלק השני מבוסס על שיטת היפוך הזמן. אנו בונים שכבה ברשת שנקרא לה שכבת Finite Difference Central Difference (FDCC). שכבת FDCC מקבלת כקלט את צעדי הזמן u^n, u^{n+1} ומחשבת בעזרת שיטת הפרשים הסופיים את צעד הזמן הקודם u^{n-1} . על ידי שרשור של N_{steps} שכבות שכאלה, החלק השני בשיטה פותר את המשוואה אחורה בזמן ומשחזר את תנאי התחלה בתוך מודל הלמידה. שכבות אלו פותחו בעזרת חבילת Keras.

החלק השלישי בשיטה מקבל כקלט את תוצאת החלק השני, השחזור על ידי היפוך הזמן, ומחדד את התוצאה כך שנקבל שחזור מדויק יותר של המקור. כדי לעשות זאת אנו משתמשים בשכבות קונבולוציה הידועות לשמצה בפיתוח למידה עמוקה. שכבות הקונבולוציה מבצעות פעולת קונבולוציה של תמונת הקלט עם מסנן המורכב ממשקולות לא ידועות. בשלב האימון, המודל לומד את המשקולות מתוך מידע הקלט על ידי תהליך אופטימיזציה על המשקולות בעזרת שיטת דעיכת גרדיאנט סטוכסטית ביחס



(P1)

איור 2 – המחשת הפלט של המודל עבור שתי דוגמאות (ימין ושמאל) עם 0%, 50% ו-100% רעש (למעלה, באמצע ולמטה). בכל דוגמה אנו רואים את תנאי ההתחלה המקורי, לימין תוצאת תהליך היפוך הזמן ובימין את הפלט של המודל שלנו

ניסויים נומריים ותוצאות

בנינו מקבץ של 5,000 דגימות כמתואר מעלה עבור רשת בגודל 128×128 . הגודל הפיזיקלי של התחום שבחרנו הוא $[0, \pi] \times [0, \pi]$

התוצאות נתונות בטבלה מספר 1. ניתן לראות שהשיטה הנאיבית לא התכנסה והתוצאות שקולות להימור. בנוסף, השיטה המוצעת החזירה תוצאות טובות בכל התרחישים אותם בחנו.

טבלה 1 – תוצאות המודל עבור התרחישים השונים

Network type	Noise level	Mean distance	Median distance	Distance standard deviation
Naive network	0%	0.1378 (5.569)	0.0247 (1.0)	0.4631 (18.72)
	50%	1.0964 (44.322)	1.1263 (45.53)	0.4016 (16.235)
	100%	1.0964 (44.322)	1.1263 (45.53)	0.4016 (16.235)
Proposed network	0%	0.0162 (0.6534)	0.0247 (1)	0.0146 (0.5917)
	50%	0.2046 (8.2722)	0.1749 (7.0711)	0.1407 (5.689)
	100%	0.2107 (8.5172)	0.1749 (7.0711)	0.1538 (6.2194)
Test: Uniformly distributed additive noise	0%	0.0085 (0.3451)	0.0 (0.0)	0.0129 (0.5224)
	50%	0.0104 (0.4199)	0.0 (0.0)	0.0135 (0.5438)
	100%	0.0178 (0.7185)	0.0247 (1.0)	0.0133 (0.5365)
Test: Uniformly distributed multiplicative noise	0%	0.0117 (0.4716)	0.0 (0.0)	0.0143 (0.5775)
	50%	0.0095 (0.3857)	0.0 (0.0)	0.0136 (0.5479)
	100%	0.0233 (0.9424)	0.0247 (1.0)	0.012 (0.4857)
Test: Thick Gaussians (initial conditions)	0%	0.0505 (2.0407)	0.0247 (1.0)	0.1358 (5.4878)
	50%	0.2587 (10.4577)	0.2281 (9.2195)	0.1639 (6.6257)
	100%	0.2402 (9.7114)	0.204 (8.2462)	0.154 (6.2252)
Test: Sensors placed on top	0%	0.0104 (0.4208)	0.0 (0.0)	0.0136 (0.5504)
	50%	0.2179 (8.8085)	0.1584 (6.4031)	0.1865 (7.5412)
	100%	0.2234 (9.0292)	0.1732 (7.0)	0.1849 (7.4734)
Test: ABC	0%	0.0147 (0.5951)	0.0247 (1.0)	0.0142 (0.5734)
	50%	0.1421 (5.7435)	0.1106 (4.4721)	0.1129 (4.5621)
	100%	0.1373 (5.5519)	0.1049 (4.2426)	0.1131 (4.5702)

מסקנות

הצגנו כעת שיטה למציאת מקורות שידור בתווך תת-ימי. נעזרנו בשיטת הפרשים סופיים לקירוב פתרון משוואת הגלים האקוסטיים וניסחנו את הבעיה כבעיית דאטה. הצענו שיטה המקרבת את פתרון הבעיה גם בהינתן רעש מדידות גדול. השיטה המוצעת משלבת ארבעה שלבים. ראשית אנו מוצאים את רמת הרעש במדידות. לאחר מכן מבצעים את תהליך ההיפוך בזמן ומשלבים לתוכנו למידה עמוקה. לבסוף, תיארונו רכיב המשתמש במידע על בעיית התפשטות הגלים כדי לשפר את תוצאות הלמידה. הראינו כי השיטה עובדת לתרחישים רבים. עבודה עתידית מכילה הרחבת השיטה לאיתור מיקום, גודל וצורה של מכשולים שונים בתחום.

מקורות

- [1] R.V. Allen, Automatic earthquake recognition and timing from single traces, *Bulletin seismological Society of America*, 68(5), 1521–1532, 1978.
- [2] C. Bardos and M. Fink, Mathematical foundations of the time reversal mirror, *Asymptotic Anal.* 29 (2002) 157–182.
- [3] U. Albocher, A.A. Oberai, P.E. Barbone and I. Harari, Adjoint-weighted equation for inverse problems of incompressible plane-stress elasticity, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 198(30–32)2412–2420, 2009.
- [4] A. Kahana, E. Turkel and D. Givoli, Convective Wave Equation and Time Reversal Process for Source Refocusing, *J. Comput. Acoust.* 26(1850016), No.02, (2018).
- [5] A. Kahana, E. Turkel, S. Dekel, D. Givoli, Obstacle segmentation based on the wave equation and deep learning, *J. Comput. Phys.* 413, 2019.

$[0, \pi]$ ובחרנו 8 חיישנים המפוזרים באופן אחיד בתחום. נציין שעל הרשת 16,384 אפשרויות שונות לבחירת מיקומי מקורות שירותיים ולאחר הרעשה, מרחב הדגימה הכולל מכיל אינסוף דגימות אפשריות ובחרנו במידע של 5,000 בלבד (ייתכן ובחרנו אותו מיקום יותר מפעם אחת). בנוסף, המידע התחלק ל-4,500 מדידות לאימון (train set), 500 לולידציה (validation) והשתמשנו ב-1,000 דגימות נוספות כמידע לבדיקות שהמודל לא ראה (test set). תנאי ההתחלה שבחרנו הם גאומטריים דקים הקרובים לאות נקודתי אך מוחלקים מעט. הפרמטרים הפיזיקליים בניסויים הללו הם $c = 1484 \frac{m}{s}$, $\Delta x = \Delta y = 0.025$ ובחרנו ב-500 צעדי זמן לחישוב. עוצמת הרעש המוכפל המתפלג נורמלית שבחרנו השתנתה לפי $\sigma = 0, 0.1, 0.2, \dots, 1$. כלומר, בחרנו בחלוקה של 11 תרחישים שונים לפי רמת הרעש ואימנו 11 מודלי למידה מתאימים. רשתות הנוירונים התאמו במשך 400 עידינים (epochs) עם גודל batch של 64. פרמטרים אלו מהווים איזון מספק למשאבי החישוב הנתונים לרשותנו. כמו כן, המודל שנשמר הוא המודל שעברו שגיאת ה-validation שהתקבלה מינימלית כדי להימנע מלמידת יתר (overfit).

הדרך בה בחרנו למדוד את הצלחת השיטה שלנו מבוססת על הדיוק באיתור מקורות השידור. אנו בוחנים את השיטה על מקבץ דגימות שלא שומש לאימון המודל. אנו משתמשים בשיטה על מנת לאתר את המקורות בקבץ זה ומשווים למיקומים הידועים של המקורות. עבור הפלט של המודל שלנו, אנו מחשבים את מרכז המסה של התמונה המתקבלת, ומרכז זה הוא המיקום החזוי של המקור. אנו מחשבים את המרחק, באורך פיזיקלי ובמספר פיקסלים, בין המיקום החזוי למיקום האמיתי. כדי להעריך את טיב השיטה אנו אוספים סטטיסטיקות על המרחק הממוצע, החציון וסטטיית התקן של המרחק. לדוגמה, מרחק ממוצע קטן ככל הניתן משמעו דיוק גבוה של השיטה.

נציין ראשית שבדקנו בנפרד פתרון מבוסס שיטת היפוך הזמן בלבד והיא הפיקה שחזור מוצלח עד 30% רעש בלבד ($\sigma = 0.3$). מעל מספר זה כבר לא ניתן להבחין בשחזור כלל וגם השיטות המתחרות מבוססות היפוך זמן שנבחנו לא הצליחו להחזיר איתור מקור אמין ברעשים גבוהים. בנוסף, בדקנו בנפרד שיטה נאיבית מבוססת למידת מכונה וכבר עבור 10% רעש השיטה כשלה וקיבלנו תוצאות השקולות לניחוש של מיקום המקור. נוסף שבדקנו את המודל עם, לעומת ללא, פונקציית המטרה המודעת פיזיקלית וקיבלנו תוצאות טובות משמעותית כאשר משתמשים בפונקציית המטרה הייחודית.

על מנת להראות שהשיטה מתאימה לשימושים מגוונים אחרים בתחום, ביצענו בחינות בתרחישים נוספים:

1. התפלגות הרעש: בחנו את השיטה עם רעש מתווסף (במקום רעש מוכפל), וכן רעש עם התפלגות אחידה (במקום התפלגות נורמלית).
2. תנאי התחלה שונה: נבחן השימוש בתנאי התחלה גאומטריים רחב משמעותית (ביחס לגאומטריה הדקה המתאים לאות נקודתי).
3. חיישנים על השפה: בחנו את השיטה כאשר החיישנים ממוקמים על שפת התחום (במקום באופן אחד במרכז התחום). לגישה זו שימושים רבים, שכן מיקום החיישנים במציאות תלוי בהרבה אילוצים ולרוב מחייב השמה על השפה.
4. תנאי שפה בולעים: בחנו את השיטה כאשר על השפה מוחלים תנאי שפה בולעים (בניגוד לתנאי ההומוגני מסוג דיריכלה המייצר שפה מחזירת גלים).