

עלון האיגוד הישראלי לשיטות חישוביות במכניקה

מספר 45

מרץ 2023

עורך: אלעד פריאל, המחלקה להנדסת מכונות, המכללה האקדמית להנדסה סמי שמעון, באר-שבע 84100, טל. 08-6475884, דואר אלקטרוני: eladp@sce.ac.il

חברי ועד אישח"מ: מיכאל אנגלמן, סלבה קרילוב, אלעד פריאל, פנחס בר-יוסף, דן גבעולי, יצחק הררי, עמיאל הרשגה, יונתן טל (אחראי האתר), מחמוד ג'בארין (נשיא), ארז גל (מזכיר-גזבר)
איש-קשר עם ECCOMAS: מישל ברקובייר

ועדת ביקורת: יורי פלדמן, מרדכי סנטו

אתר אישח"מ (IACMM) באינטרנט: <http://www.iacmm.org.il>

רישום לחברות באגוד ופרטים נוספים: באתר האיגוד הנ"ל, או פנו למזכיר-גזבר, פרופ' ארז גל, טל. 08-6479671, דואר אלקטרוני: erezgal@bgu.ac.il

מ-"שולחן העורך":

לרגל ציון יום העיון ה-50 שערך האיגוד בסוף שנת 2022, אני רוצה לשתף את הקוראים בסקירה היסטורית קצרה. את התוכן של סקירה קצרה זו לקחתי מהרצאת הפתיחה של נשיא האיגוד פרופ' מחמוד ג'בארין ביום העיון ה-50 שנערך באוניברסיטת תל אביב.

האיגוד הישראלי לשיטות חישוביות במכאניקה (אישח"מ) הוקם בשנת 1995. המקימים היו פרופ' פנחס בר-יוסף, פרופ' יצחק הררי ופרופ' דני גבעולי. פרופ' בר-יוסף אף כיהן כנשיא הראשון של האיגוד. העלון הראשון של האיגוד יצא לאור בשנת 1996 ועורכו הראשון היה פרופ' זהר יוסיבאש. מטרת האיגוד המוצהרת הייתה ועודנה, "...קידום המדע ויישומיו באמצעות שיטות חישוביות במכאניקה תוך הדגשת הצרכים המקומיים".

כלי מרכזי למימוש מטרה זו הינו ארגון של ימי העיון של האיגוד. ימי עיון אלו משמשים במה לחילופי מידע וביסוס שיתופי פעולה בין חוקרים. מ-1995 ועד היום, תשעה מוסדות אקדמיים שונים, מצפון ועד דרום המדינה, לקחו חלק באירוח יום העיון. מרבית ימי העיון התקיימו בשלושה מוסדות עיקריים: הטכניון, אוניברסיטת תל-אביב ואוניברסיטת בן גוריון.

במהלך השנים האיגוד אירח במסגרת ימי העיון כ-35 מרצים ממוסדות אקדמיים מעבר לים, מרביתם מהמובילים בעולם בתחום המכאניקה החישובית.

האיגוד תומך בקידום סטודנטים וחוקרים צעירים. זה נעשה הן על ידי עריכת תחרויות של הרצאה מצטיינת בימי העיון השונים, והן על ידי מתן פרס לחיבורי דוקטורט מצטיינים.

ובנימה אישית, אני מרגיש חוב גדול כלפי מקימי האיגוד ומוביליו לאורך השנים. פעילות האיגוד תרמה רבות להתפתחותי האקדמית ויש לה חלק גדול בבחירה שלי

להקדיש את חיי המקצועיים לתחום המכאניקה החישובית. אין לי כלל ספק שכמוני יש עוד רבים.

מי יתן ונזכה כולנו לתרום לאיגוד לא פחות ממה שזכינו לקבל ממנו לאורך השנים.

כמו תמיד, אתם מוזמנים לבקר באתר האיגוד בו תמצאו עוד מידע על האיגוד ועל מכאניקה חישובית בארץ ובעולם (<http://www.iacmm.org.il>). באתר תוכלו לצרף עצמכם (ללא תשלום) לרשימת התפוצה האלקטרונית, להירשם

כחברים באגוד או לחדש את חברותכם. טופס רישום לאיגוד ניתן למצוא <http://www.iacmm.org.il/member>

עדכונים מיום העיון הקודם:

יום העיון ה-50 התקיים ב-27 לאוקטובר בפקולטה להנדסה של אוניברסיטת תל-אביב. המארגנים המקומיים היו ד"ר גיל מרום וד"ר יורם קוזק. יום העיון ה-50 נפתח בסקירה היסטורית קצרה בנושא תולדות האיגוד שנתן נשיא האיגוד פרופ' מחמוד ג'בארין.

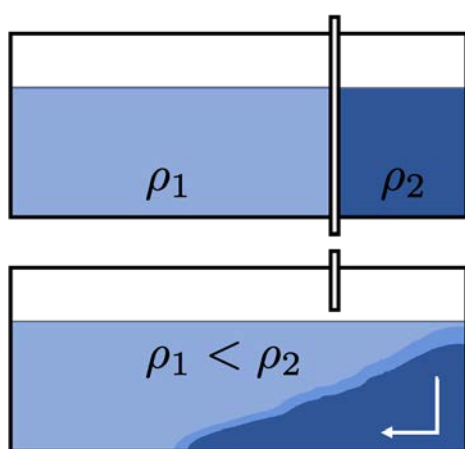


ISCM50 – נשיא האיגוד פרופ' ג'בארין בסקירה היסטורית של תולדות האיגוד.

מונעת-צפיפות ריאליסטית, ואת ההשפעה של מקורות משתנים, חימום, המסת קרחונים, ועוד. מבחינה מתמטית המודל הוא מערכת משוואות אינטגרליות-דיפרנציאליות חלקיות, עבורה אנו מוכיחים, באופן מוקדם, תכונות בסיסיות כגון קיום ויחידות של פתרונות, וחלקות הפתרונות ביחס לשינוי בפרמטרים של הבעיה.

רקע

במערכות אוקייניות שונות, צפיפות המים המקומית משתנה בעקבות מקורות שונים על פני השטח, כגון חימום משתנה במרחב, משקעים, אידוי, והיווצרות/המסת קרח. כל אלו משנים את הצפיפות, שנקבעת ע"י משוואת מצב המשקל את הטמפרטורה, המליחות, והלחץ המקומיים של מי הים. כאשר הבדלי הצפיפות הם משמעותיים על פני מרחקים גדולים, אלו מניעים זרימה שמובילה לשקיעת מים כבדים יותר מתחת למים קלים יותר (איור 1).



איור 1 - דוגמא פשוטה לזרימה מונעת-צפיפות. בפגישת מים כבדים עם מים קלים יותר, למשל בשל הבדלי מליחות/טמפרטורה, המים הכבדים יכולים לשקוע מתחת למים הקלים לפני הערבוב בין המים.

כשהמקורות הדיפרנציאליים מתמשכים לאורך זמן, המערכת יכולה להתייצב על זרימה מחזורית הכוללת ענף זרימה על פני השטח, ענף של שקיעה, וענף של זרימה חוזרת במעמקים. כך קורה לדוגמא: בפגישה של נהר של מים מתוקים וים מלוח; במפרץ ליון, כאשר רוחות חזקות מקררות ומאדות את מי הים התיכון; ובאוקיינוס האטלנטי, כאשר המים הצפוניים קרים יותר ומלוחים פחות מאשר המים בקווי רוחב בינוניים.

הזרימה מונעת-צפיפות באטלנטי, הנקראת הזרימה המרידיאנלית האטלנטית (Atlantic Meridional Overturning Circulation, AMOC), היא למעשה חלק של הזרימה התרמוהלינית הגלובלית. זרימה זו מהווה מרכיב חשוב במערכת האקלים העולמית בשל תפקידה בהסעת מים חמים מאזור המשווה לקווי רוחב צפוניים, וקשורה לכך שהחורף באירופה מתון הרבה יותר מהחורף באותו קו רוחב בקנדה [2,3,4].

מפות של מליחות וטמפרטורה באוקיינוס האטלנטי (איור 2) מראות שכיוון זרימת ה-AMOC אינו מובן מאליו - המים

ההרצאה הראשונה ניתנה על ידי המרצה המוזמנת של יום העיון, **Prof. Laura De Lorenzis** מ **ETH Zurich**. פרופ' **De Lorenzis** הדגימה שימוש בשיטות לימוד מכונה מתקדמות לזיהוי אמין של חוקי חומר מתוך מספר ניסויים מצומצם. המשך יום העיון כלל עוד שלושה מושבי הרצאות שבהם ניתנו עוד כאחד עשר הרצאות שונות על ידי חוקרים מהאקדמיה והתעשייה.



ISC50 – הוועד המנהל של האיגוד והמארגנים המקומיים יחד עם המרצה האורחת פרופ' **De Lorenzis**.

כמו בכל שנה, גם השנה מתקיימת תחרות הרצאות של סטודנטים לתארים מתקדמים הניתנות בימי העיון. צוות השופטים בתחרות ההרצאה המצטיינת ביום העיון ה-50 היו ד"ר פבל גליץ, ד"ר אורי אלבוחר ואנוכי. השופטים בחרו בהרצאה של הגברת אורי ספורטה-כץ ממכון ויצמן למדע כהרצאה המצטיינת. אני מודה לאורי על שהסכימה לכתוב את המאמר המעניין המופיע בהמשך העלון.

ISC51

יום העיון ה-51 יתקיים ב-23 למרץ 2023, בפקולטה להנדסת אווירונאוטיקה וחלל בטכניון (המארגנים המקומיים הם ד"ר פבל גליץ וד"ר דנה סולוב).

המרצה המוזמן הוא **Prof. Sanjay Govindjee**, University of California, Berkeley, USA. פרטים נוספים ניתן למצוא באתר האיגוד ובהודעות לתפוצה.

מידול קינמטי-דינמי לזרימה תלת מימדית מונעת-צפיפות בים¹

אורי ספורטה-כץ¹, פרופ' אדריס ס. תיתי^{1,2,3}, פרופ' חזי גילדור⁴, ופרופ' ורד רום-קידר¹

¹המחלקה למדעי המחשב ומתמטיקה שימושית, מכון ויצמן למדע, ישראל

²המחלקה למתמטיקה שימושית ופיזיקה תיאורטית, אוניברסיטת קמברידג', אנגליה

³המחלקה למתמטיקה, אוניברסיטת טקסס א"י אנד אה"ב

⁴המכון למדעי כדור הארץ, האוניברסיטה העברית, ישראל

תקציר

בעבודה זו נציג מודל חדש לזרימה תלת מימדית מונעת-צפיפות באוקיינוס, בהשראת משטר הזרימה בצפון האוקיינוס האטלנטי. בעזרת מודל זה נחקור את הדינמיקה של זרימה

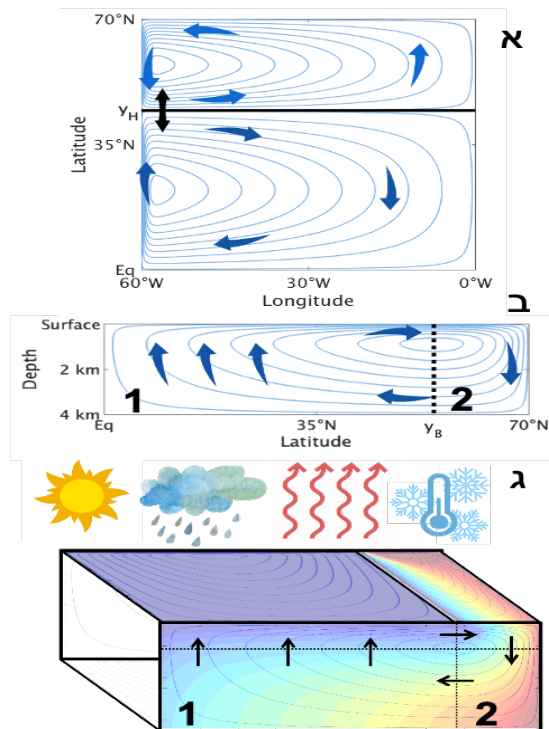
¹ סיכום מתורגם של [1]

תכונה משותפת חשובה: שניהם משתמשים בשדה מהירויות עם צורה מרחבית מוגדרת מראש.

הצפוניים הם בו בעת קרים יותר (ולכן כבדים יותר) ומלוחים פחות (ולכן קלים יותר) ממי קווי הרוחב הבינוניים.

המודל הקינמטי-דינמי

בפועל, הזרימה באוקיינוס היא תלת-מימדית, ומורכבת הן מזרימה שנובעת מכוחות חיצוניים כגון רוחות, והן מזרימה איטית יותר שנובעת מכוחות פנימיים, קרי הבדלי צפיפויות. כדי למדל זאת, אנו משלבים את הגישה הדינמית של מודלי-קופסאות עם הגישה הקינמטית של הסעה כאוטית, לתוך מודל תלת מימדי קינמטי-דינמי של זרימה מונעת-צפיפות (איור 3).

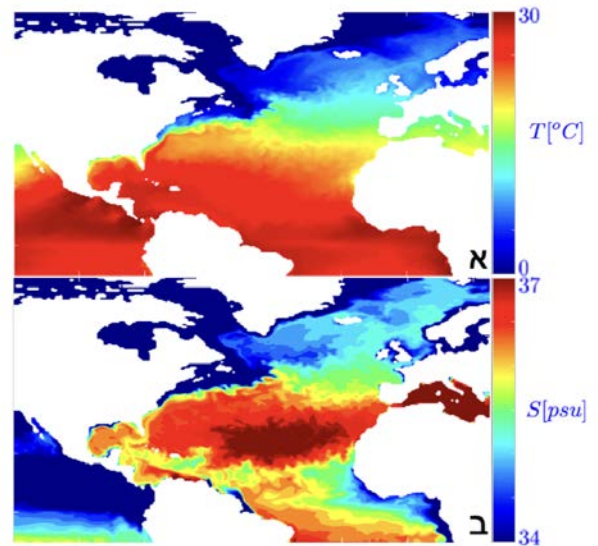


איור 3 - המודל הקינמטי-דינמי. א: $\vec{u}_E(\vec{r}, t)$, זרימה אופקית של שני מערבולות מתנדנדות עונתית, מודל קינמטי מוכר של הזרימה בצפון האוקיינוס האטלנטי. ב: $\vec{u}_I(\vec{r})$, זרימת עומק מחזורית, מחקה את ה-AMOC, בעלת עוצמה משתנה לפי הפרשי הצפיפויות בין שני חלקי הקופסא. ג: אילוסטרציה של המודל המלא, כולל תנאי פני שטח. הצבעים מסמלים את הצפופות המשתנה בתוך הבריכה. מתוך [1].

המודל בבסיסו פותר את משוואות ההסעה-דיפוזיה של מלח (S) וחום (T) בתוך קופסא:

$$\begin{aligned}\partial_t T &= \nabla \cdot (\kappa \nabla T) - \vec{u}(T, S) \cdot \nabla T + f_T \\ \partial_t S &= \nabla \cdot (\kappa \nabla S) - \vec{u}(T, S) \cdot \nabla S + f_S\end{aligned}$$

כאשר f_T, f_S הם מקורות פנימיים של חום ומליחות. שדה המהירות $\vec{u}$ מצמד בין המשוואות, ובבניה שלו חבוי המידול שלנו. הוא בנוי משני נסכמים: $\vec{u}_E(\vec{r}, t)$, שדה הזרימה החיצוני, שאינו תלוי בצפיפות, ולמעשה נקבע מראש בכל אופן בו נבחר, והוא החלק הקינמטי של המודל; ו- $\vec{u}_I(\vec{r})$, המבנה המרחבי של שדה הזרימה הפנימי, שנוצר כתוצאה מהבדלי צפיפויות. בעוד שהעוצמה של $\vec{u}_E$ נקבעת מראש על ידי מספר פקלט של הבעיה Pe, העוצמה של $\vec{u}_I$ וכן כיוונו נקבעים

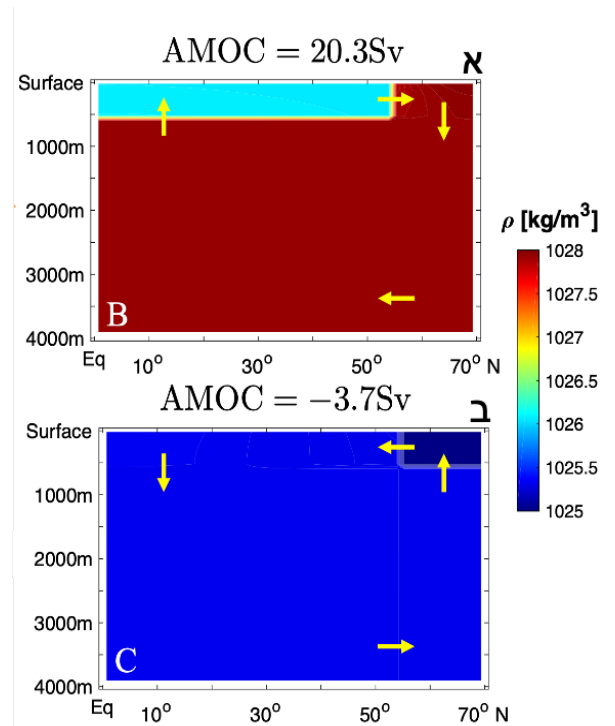


איור 2 טמפרטורת המים (א) ומליחות המים (ב) בפני השטח בצפון האוקיינוס האטלנטי. המים הצפוניים קרים יותר ומלוחים פחות מהמים בקווי רוחב בינוניים.

כדי שכיוון הזרימה ישאר כפי שהוא, כך שהשקיעה תתרחש בצפון, מי פני השטח הצפוניים צריכים להיות מלוחים מספיק. מכיוון שעיקר המליחות מגיעה מאיזור המשווה, אחת הסיבות שהמים מלוחים מספיק היא הקיום של ה-AMOC עצמו, בתהליך שנקרא משוב סחיפת המלח [4] (salinity advection feedback). במחקר מכון של סטומל [5] הוא בנה מודל-קופסאות דינמי מנימלי לזרימה מונעת צפיפות, והראה שבמערכת זו יש דו-יציבות, כלומר שני כיווני הזרימה יציבים. מאז ההצגה הראשונית שלהם, מודלי-קופסאות הורחבו בעבודות רבות [6-11]. בנוסף, הביסטיביליות הוכחה כתכונה של מערכת אוקיינית ריאליסטית [12]. בעקבות מחקרים אלו, שאלת היציבות של הזרימה באטלנטי היא שאלה פתוחה, ובתוך כך מידת הרגישות שלה לגורמים משתנים כגון מקורות מים משתנים, התחממות הים, המסת קרחונים, ועוד.

בעוד מודל הקופסאות מניח זרימה פשוטה בין הקופסאות, וערבוב מיידי של המים בתוך כל קופסא, זרימת הים היא מורכבת ומתרחשת על פני סקאלות מרחק וזמן רבות. מסלולי החומרים במים הם כאוטיים [13], ומידת הערבוב משתנה במרחב. לדוגמא, מי פני השטח האטלנטיים ניתנים למידול גס על ידי שתי מערבולות דו-מימדיות שמתנדנדות צפונה ודרומה עם עונות השנה (איור 3א). זרימה זו נובעת מרוחות חזקות שמשנות את כיוון עם קווי הרוחב. במודל קינמטי פשוט ולאגנטי, ליו ויאנג [14] הראו שנדנד זה מייצר הסעה כאוטית (chaotic advection), כלומר רגישות גבוהה של מסלולי המים לתנאי ההתחלה, למרות שבכל רגע נתון הזרימה היא למינרית ודו-מימדית. הסעה כאוטית, מצידה, מערבבת את המים לאורך זמן ובאופן משתנה במרחב. מחקרים כאלו מספקים הבנה של תהליכים פיזיקליים הקשורים לערבוב והובלה של נוזלים פסיביים, אך הם אינם כוללים מנגנון משוב כלשהו. שימו לב שלדגמי הקופסה ולמודלים הקינמטיים יש

באופן דינאמי על ידי מספר ריילי התרמי Ra^T כפול פרמטר העוצמה, המסומן a_I , ושווה להפרש הצפיפות הממוצעת, המסומנת $\langle \rho \rangle$, בין שני אזורים בקופסא, המסומנים אזור 1 ואזור 2 (ראו איור 4).



איור 4 - המודל הקינמטי-דינמי, מכון לחקת מודל 4-הקופסאות הפשוט [6,7], מפגין בי-סטביליות: עבור אותם פרמטרים, ישנו פתרון אחד יציב של זרימה חזקה עם שקיעה בצפון (א) ופתרון אחד יציב של זרימה חלשה עם שקיעה בדרום (ב).

כך, משוואות המהירות הן:

$$\begin{aligned}\vec{u}(T, S) &= Pe \cdot \vec{u}_E(\vec{r}, t) + Ra^T \cdot a_I(T, S) \cdot \vec{u}_I(\vec{r}) \\ a_I(T, S) &= \langle \rho(T, S) \rangle_2 - \langle \rho(T, S) \rangle_1 \\ \rho(T, S) &= \rho_0(1 - \alpha T + \beta S)\end{aligned}$$

נציין כי במודל, הצפיפות נקבעת על ידי משוואת המצב הלינארית, ואינה לוקחת בחשבון את השפעת הלחץ (צפיפות פוטנציאלית), שכן בעומקים שווים השפעת הלחץ זניחה. לסגירת המודל נותר להוסיף תנאי שפה: עבור החום, תנאי שפה הם של השוואת טמפרטורות עם האטמוספירה; ועבור המליחות, תנאי השפה הם של הוספה/גרירה של מלח בקצב נתון, במטרה לחקות תהליכים של אידי וגשם, כך שסך כמות המלח לא משתנה. כך, לאחר כיוון של תנאי ההתחלה, תנאי השפה, והפרמטרים הקבועים של הבעיה, שאלת המחקר מתנקזת לתוך הדינמיקה של הפלט של המודל: פרמטר העוצמה a_I , שיכול להתייב על ערך קבוע, להפגין בי-סטביליות, להתנדנד באופן מחזורי, או להציג התנהגות כאוטית.

תוצאות

המודל שלנו הוא הרחבה טבעית של מודל 4-קופסאות המוצג ב-[6,7], שלוקח בחשבון שינויים מקומיים בצפיפות המים, שדה מהירויות מורכב, ודיפוזיה סופית. ב-[1] אנו מראים

באופן ריגורוזי כיצד מגיעים ממשוואות המודל שלנו למשוואות מודל הקופסאות. בנוסף, אנו מראים נומרית כי כאשר מכוונים את הפרמטרים בהתאם, מקבלים טווח רחב של בי-סטביליות: עבור אותם פרמטרים ישנם שני פתרונות יציבים, אחד עם צפון כבד יותר ושקיעה בצפון, ואחד עם צפון קל יותר ושקיעה מתונה הרבה יותר בדרום (איור 4).

כדי להפעיל את המודל על הצפון-אטלנטי, השתמשנו בדאטה נומרי של השנים האחרונות, לפיו כיוונו את הפרמטרים: מהירות הזרימה האופקית, פונקציות פני השטח, מידת הדיפוזיה, וכו'. כך, קיבלנו תוצאה של טמפרטורה ומליחות ריאליסטיים, וכן פרמטר העוצמה התייב על אוסצילציות עונתיות סביב ערך ריאליסטי (איור 5). עם זאת, המצב הסופי של המודל היה לא פיזיקלי - נוצר מצב של צפיפות גבוהה יותר מעל צפיפות קטנה יותר. תוצאה זו מראה שחסר לנו מנגנון שדואג לערבב את המים באופן אנכי כאשר הצפיפות מתהפכת כך.

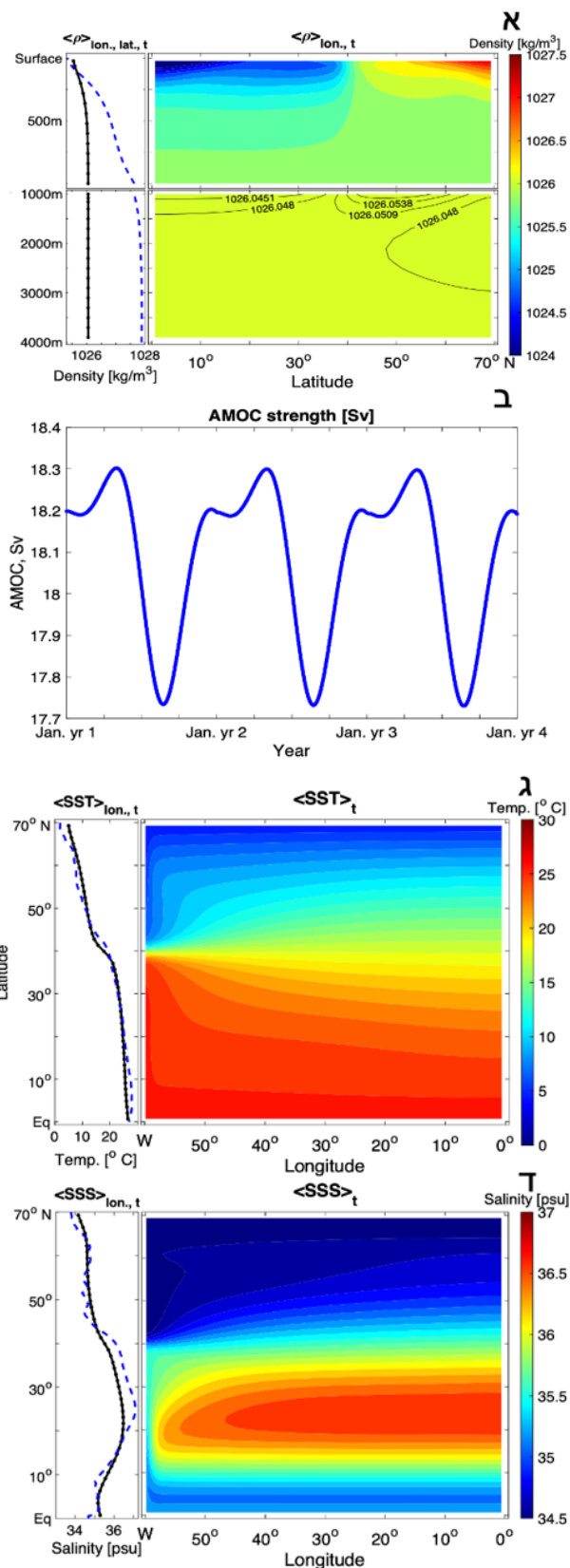
המודל הקינמטי-דינמי הינו זוג משוואות דיפרנציאליות חלקיות, המצומדות ביניהן באופן לא לינארי ע"י אינטגרלים. אנחנו הוכחנו באופן ריגורוזי כי המודל מוגדר היטב במובן של הדמרד (Hadamard): בהינתן כמה תנאי רגולריות על הפרמטרים והפונקציות המרכיבים את הבעיה, למודל יש פתרונות ייחודיים גלובליים בזמן; והפתרון תלוי באופן רציף בפרמטרים של הבעיה. כמו כן, הראנו שהפתרונות יקיימו כמה אי-שיויונות שתלויים בפרמטרים. כאשר כל הפרמטרים אינם תלויים בזמן, הוכחנו גם כי למערכת יש מצב יציב, ואם מספר ריילי Ra^T קטן מספיק, המערכת תתכנס לפתרון יציב ייחודי כשהזמן שואף לאינסוף. הוכחה זו מראה שהבי-סטביליות של המערכת הולכת לאיבוד כאשר הדיפוזיה המינימאלית בבעיה גדולה מספיק ביחס לאדבקציה. את התכונה הזו אנו רואים גם נומרית: הבי-סטביליות שמתקבלת בגבול הפרמטרים של מודל 4 הקופסאות הולכת לאיבוד כאשר הדיפוזיה בין הקופסאות גדלה מספיק.

מסקנות

בעבודה זו הצגנו מודל חדש קינמטי-דינמי לאינטרקציה בין זרימה תלת מימדים לבין זרם מונע-צפיפות בים. המודל נבנה בהשראת משטר הזרימה בצפון האוקיינוס האטלנטי. המודל הינו הרחבה טבעית של מודלי קופסאות כגון [5-7] שיכול לכלול זרימה משוכללת יותר, ערבוב לוקאלי, תנאי שפה משתנים, ועוד. בעזרת המודל אנו יכולים הן לשחזר תוצאות מתוך מודלי קופסאות מוכרים, והן לכוון את הפרמטרים כדי לקבל התאמה טובה לצפון האטלנטי - בטמפרטורה, במליחות, ובעוצמת הזרימה המונעת-צפיפות. עם זאת, חסר למודל שלנו מנגנון לערבוב כאשר נוצר מצב של אי-יציבות אנכית (בעיה ידועה של מודל הקופסאות), נושא למחקר הבא. לבסוף, מודל זה הינו מערכת משוואות דיפרנציאליות חלקיות לא לינאריות, ואנחנו הוכחנו באופן ריגורוזי שהבעיה מוגדרת היטב במובן של הדמרד. למודל ולהוכחה הרחבות רבות אפשרויות, כולל הוספת קופסאות, הוספת זרימות, שינוי אילוצי פני השטח, ועוד, כך שניתן להשתמש במודל זה לתיאור מערכות ימיות מגוונות. לקריאה מעמיקה, ניתן להסתכל ב-[1]. המשך המחקר כוללת ניתוח המצבים בהם פרמטר עוצמת הזרימה מתנהג באופן כאוטי, וכיצד יראה המעבר לכאוס.

מקורות

- [1] O. Saporta-Katz et al., *J. Nonlinear Sci.*, 2023.
- [2] M. W. Buckley, J. Marshall, *Rev. Geophys.*, 2016.
- [3] H. L. Johnson et al., *J. Geophys. Res.*, 2019.
- [4] D. Ferreira et al., *Ann. Rev. Earth Planet Sci.*, 2018.
- [5] H. Stommel, *Tellus*, 1961.
- [6] R. X. Huang et al., *J. Phys. Oceanogr.*, 1992.
- [7] Tzipermal et al., *J. Phys. Oceanogr.*, 1994.
- [8] H. A. Dijkstra, M. Ghil, *Rev. Geophys.*, 2005.
- [9] C. Pasquero, E. Tziperman, *J. Phys. Oceanogr.*, 2004.
- [10] W. Barham, I. Grooms, *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.*, 2019.
- [11] C. Budd et al., *Physica D*, 2021.
- [12] S. Rahmstorf, *Geophys. Res. Lett.*, 2005.
- [13] H. Aref et al., *Rev. Mod. Phys.*, 2017.
- [14] H. Yang, Z. Liu, *Geophys. Res. Lett.*, 1994.



איור 5 - המודל הקינמטי-דינמי, מכון לאוקיינוס האטלנטי, מגיע למצב יציב עם תנודה עונתית. הטמפרטורה, המליחות, והצפיפות בפני השטח (קו שחור) מתאימים לתצפיות (קו כחול), אך הצפיפות בעומק נמוכה מדי. ממוצע עוצמת ה-AMOC שמתקבלת מתאימה לתצפיות.