

## עלון האיגוד הישראלי לשיטות חישוביות במכניקה

מספר 46

מאי 2024

**עורך:** אלעד פריאל, המחלקה להנדסת מכונות, המכללה האקדמית להנדסה סמי שמעון, באר-שבע 84100, טל. 08-6475884, דואר אלקטרוני: eladp@sce.ac.il

**חברי ועד אישח"מ:** מיכאל אנגלמן, סלבה קרילוב, אלעד פריאל, פנחס בר-יוסף, דן גבעולי, יצחק הררי, עמיאל הרשגה, יונתן טל (אחראי האתר), מחמוד ג'בארין (נשיא), ארז גל (מזכיר-גזבר)

**איש-קשר עם ECCOMAS:** מישל ברקובייר

**ועדת ביקורת:** יורי פלדמן, מרדכי סנטו

**אתר אישח"מ (IACMM) באינטרנט:** <http://www.iacmm.org.il>

**רישום לחברות באגוד ופרטים נוספים:** באתר האיגוד הנ"ל, או פנו למזכיר-גזבר,

פרופ' ארז גל, טל. 08-6479671, דואר אלקטרוני: [erezgal@bgu.ac.il](mailto:erezgal@bgu.ac.il)

### מ-"שולחן העורך":

כהרצאה המצטיינת של יום עיון זה. מבין ההרצאות המצטיינות של יום העיון ה-50 ויום העיון ה-51, נבחרה ההרצאה של הגברת אורי ספורטה-כץ (זוכת יום העיון ה-50), כהרצאה המצטיינת לשנת 2023. גברת ספורטה-כץ תקבל מהאיגוד מימון של עד \$1000 להצגת עבודת המחקר שלה בכנס בינלאומי לבחירתה. ברכות לזוכים מר נדז'דה וגברת ספורטה-כץ על הזכייה שלהם אשר מעניקה להם גם חברות חנים באיגוד לשנה הקרובה.



ISC51 –הוועד המנהל של האיגוד והמארגנים המקומיים יחד עם המרצה האורח פרופ' Sanjay Govindjee.

לסיום, המאמר המצורף לעלון הנוכחי נכתב על ידי ד"ר ירון שפירא מהמרכז למחקר גרעיני - נחל שורק (ממ"ג). המאמר מתאר טכניקות להאצת חישובי פייז-פילד (Phase field). אני מודה לד"ר שפירא על הנכונות לכתוב את המאמר.

### ISC51-52

יום העיון ה-52 שנדחה מתאריכו המקורי עקב מאורעות אוקטובר 2023, יתקיים ב-23 למאי 2024, באוניברסיטת בן גוריון שבנגב. תודה רבה למארגנים המקומיים ד"ר יורי פלדמן וד"ר פבל טרפר שהשקיעו רבות בארגון יום עיון זה בתקופה מאתגרת זו.

מדינת ישראל נמצאת מה 7.10.23 במלחמה. כתוצאה מהאירועים הקשים שהשפיעו על כל אחד ואחת מאתנו. פעילויות האיגוד, כמו פעילויות רבות במדינה נעצרו. יום העיון ה-52 שהיה אמור להתקיים באוניברסיטת בן גוריון בנובמבר 2023 נדחה עקב המצב. גם בימים אלו, חצי שנה מאז האירועים הנוראיים של שמחת תורה, מגויסת המדינה כולה, בחזית ובעורף על מנת להתמודד עם האתגרים העומדים בפניה. אני בטוח שכולכם מצטרפים אלי בתקווה לשוב המהיר והבטוח של כל החטופים והחיילים ושכולנו נדע ימים טובים יותר.

מידע נוסף על האיגוד ועל מכניקה חישובית בארץ ובעולם תמצאו ב <http://www.iacmm.org.il>. באתר תוכלו לצרף עצמכם (ללא תשלום) לרשימת התפוצה האלקטרונית, להירשם כחברים באגוד או לחדש את חברותכם. טופס רישום לאיגוד ניתן למצוא <http://www.iacmm.org.il/member>

### עדכונים מיום העיון הקודם:

יום העיון ה-51 התקיים ב-23 למרץ בפקולטה להנדסת אווירונאוטיקה וחלל בטכניון. המארגנים המקומיים היו ד"ר פאבל גליץ וד"ר דנה סולוב. המרצה המוזמן Prof. Sanjay Govindjee, University of California, Berkeley, USA העביר הרצאה מעניינת על שיטות חישוביות לחומרים משני פאזה. בהמשך יום העיון ה-51 התקיימו עוד שלושה מושבי הרצאה שבהם הועברו עוד 12 הרצאות מרתקות בנושאים שונים ומגוונים.

כמו בכל שנה, גם השנה מתקיימת תחרות הרצאות של סטודנטים לתארים מתקדמים הניתנות בימי העיון.

השנה, הזוכים נבחרו מיום העיון ה-50 ויום העיון ה-51. במסגרת יום העיון ה-51, צוות השופטים, ד"ר דנה סולוב, ד"ר ניקולו פוליני וד"ר ניר טרבלסי בחר בהרצאה של מר עילאי נדז'דה (סטודנט לתואר שני של ד"ר פאבל גליץ')

# טכניקות להאצת התכנסות של פתרונות

## סטגרים ותפקודם הנומרי בבעיות

### פיז-פילד\*

ירון שפירא<sup>1,2,3</sup>, לארס רדטקה<sup>1</sup>, שטפן קולמנסברגר<sup>2,4</sup>, ואלכסנדר דוסטר<sup>1</sup>

<sup>1</sup>המכון לתכנון ואנליזות ספינות, האוניברסיטה הטכנית של

המבורג, גרמניה

<sup>2</sup>המחלקה להנדסה אזרחית וסביבה, האוניברסיטה הטכנית של

מינכן, גרמניה

<sup>3</sup>כעת בממ"ג שורק, ישראל

<sup>4</sup>כעת באוניברסיטת באוהאוס, ויימאר, גרמניה

## 1 תקציר

פתרונות סטגריים למידול בעזרת פיז-פילד של סדקים נחשבים כרובסטיים ואמינים, אך לרוב סובלים מקצבי התכנסות נמוכים מאד. בעבודה זו נסכם כמה מהשיטות שהוצעו בספרות להאצת התכנסות של פתרונות סטגריים ונבחן את תפקודם הנומרי בהקשר של מידול פיז-פילד של סדקים. בין השיטות שנבחנו, מצאנו כי שיטת אנדרסון היתה היעילה ביותר, הן במספר האיטרציות הממוצע הנדרש להתכנסות והן ביציבות הפתרון הנומרי.

## 2 מבוא

מידול בעזרת פיז-פילד היא שיטה וריאציונית למידול סדקים שנהיתה פופולרית בשני העשורים האחרונים. לשיטה זו מספר יתרונות מול מכניקת שבר אלסטית-ליניארית קלאסית, כשהבולטים שבהם הם הימנעות מבעיות הקשורות בסינגולריות בעזרת ייצוג הסדק על ידי משתנה רציף, אפשרות לחזות היווצרות של סדק והתקדמות לאורך נתיבים מסובכים ללא שימוש בקריטריונים נוספים, שימוש בעקרון וריאציוני המאפשר צימוד פשוט עם תופעות פיזיקליות נוספות, והייצוג הסתום של הסדק המאפשר לרשת מבלי להתחשב בגאומטריה הספציפית שלו.

הניסוח הוריאציוני של מידול פיז-פילד לסדקים הוצע לראשונה על ידי [3, 4], ומבוסס על מציאת מינימום של פונקציונל האנרגיה

$$\mathcal{F}(\mathbf{u}, \varphi) = \int_{\Omega} \left[ g(\varphi) \psi(\mathbf{u}) + \frac{G_c}{c_w \ell} \left( w(\varphi) + \ell^2 \nabla \varphi \cdot \nabla \varphi \right) - \hat{\mathbf{b}} \cdot \mathbf{u} \right] d\Omega - \int_{\partial \Omega_N} \hat{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{u} d\Gamma, \quad (1)$$

כאשר  $\mathbf{u}$  הוא שדה ההזזות,  $\varphi$  הוא שדה הפזה (פיז-פילד) המשתנה ברציפות בין אפס לאחד ומסמן האם החומר שלם או שבור,  $\psi(\mathbf{u})$  היא

צפיפות אנרגיית העיבורים,  $g(\varphi)$  היא פונקציית דגרדציה האחראית להעלים את ההתנגדות האלסטית עם התפתחות הנזק,  $G_c$  הוא קצב שחרור האנרגיה הקריטי של גריפית, הפרופורציונלי לחסינות לשבר,  $\ell$  הוא אורך גולריזציה,  $w(\varphi)$  היא פונקציית דיסיפציה המשפיעה על התפתחות הנזק,  $\hat{\mathbf{b}}$  כוחות גוף, ו- $\hat{\mathbf{t}}$  הטרחות. ניתן לבחור פונקציות דגרדציה ודיסיפציה שונות המשפיעות על התפתחות הנזק, לפרטים נוספים הקוראים מופנים ל-[8].

בורדין ושות' [3] העירו כי הפונקציונל (1) לא קמור בשני המשתנים, אבל הוא כן קמור בכל אחד מהמשתנים בנפרד בזמן שמקפידים את המשתנה השני. עובדה זו הובילה לגישה של פתרון סטגרי, כלומר פתרון איטרטיבי בסגנון גאוס-זיידל בין פתרון האלסטיות לפתרון הפיז-פילד, אשר ידוע גם כ-*alternate minimization*. פתרון זה נחשב לאמין, אך הוא סובל מקצב התכנסות איטי מאד. לדוגמא, באינקרמנטי העמסה בהם הסדק פורץ נדרשות לרוב מאות ואף אלפי איטרציות עד להתכנסות הפתרון. מכאן עולה הצורך בשיטות להאצת ההתכנסות.

אם בוחרים בפונקציות דגרדציה ודיסיפציה ריבועיות, משוואת הפיז-פילד הופכת למשוואה ליניארית אשר הפתרון שלה אוטומטית תחום בין אפס לאחד, בבחירות אחרות יש להשתמש בשיטות למינימיזציה תחת אילוצים. מיהה ושות' [6] הציעו להחליף את צפיפות אנרגיית העיבורים במשוואת הפיז-פילד במשתנה היסטוריה השומר את הערך המקסימלי של צפיפות אנרגיית העיבורים בנקודה על פני היסטוריית ההעמסה. משתנה היסטוריה זה מאפשר לאכוף בצורה טבעית אי-החלמה של סדקים, שוב מבלי להידרש למינימיזציה תחת אילוצים.

כדי להבחין בין מתיחה לחיצה הן מיהה ושות' [7] והן אמור ושות' [2] הציעו לעבור מניסוח איזוטרופי, בו כל צפיפות אנרגיית העיבורים מצומדת לפונקציית הדגרדציה, לניסוח אנאיזוטרופי, בו יש לפצל את צפיפות אנרגיית העיבורים לחלק חיובי ולחלק שלילי ולצמד את פונקציית הדגרדציה רק עם החלק החיובי. מיהה השתמש בפירוק ספקטרלי, בעוד אמור השתמש בפירוק נפחי-דביאטורי אשר זול יותר מבחינה חישובית. אמבטי ושות' [1] הראו שתוצאות שני המודלים קרובות. הניסוח האנאיזוטרופי יוצר משוואת אלסטיות לא ליניארית. אמבטי ושות' הציעו ניסוח היברידי בו כל צפיפות אנרגיית העיבורים מוכפלת בפונקציית הדגרדציה במשוואת האלסטיות אך רק החלק החיובי של אנרגיית העיבורים נכנס למשתנה ההיסטוריה במשוואת הפיז-פילד. יש להדגיש שהן השימוש במשתנה ההיסטוריה והן הניסוח ההיברידי מובילים ליעקוביאן לא סימטרי של הבעיה המצומדת.

בחירה זו של פונקציות דיסיפציה ודגרדציה ריבועיות יחד עם שימוש במשתנה ההיסטוריה ובניסוח ההיברידי מובילה לזוג משוואות ליניאריות עבור האלסטיות והפיז-פילד אשר מאפשרות לנו להתמקד בתפקוד של סכימות ההאצה להתכנסות האיטרציות הסטגריות, ולא בחוסר הליניאריות של המשוואות המופרדות. ניסוח מפורט ניתן למצוא ב-[8, 1].

בפתרון בעיה עם שני שדות מצומדים ניתן להאיץ את התכנסות האיטרציות הסטגריות על ידי עדכון פתרון של שדה אחד או של שני השדות. אסטרטגיה בה סכימת ההאצה מופעלת רק על שדה אחד תכונה  $Sl$  ואסטרטגיה בה סכימת ההאצה מופעלת על שני השדות תכונה  $S2$ .

כדי להימנע מהשאלה על איזה שדה יש להפעיל את סכימת ההאצה, בהצגת סכימות ההאצה להלן נתייחס לקלט של הפותרן באיטרציה ה- $i+1$  ב- $x_i$ , הפלט של הפותרן יסומן כ- $\tilde{x}_{i+1}$ , והפתרון לאחר עדכון בהתאם לסכימת ההאצה יסומן כ- $x_{i+1}$ , כאשר אנו שואפים לאפס את הרזידואל  $\|r_i\|_2 = \|\tilde{x}_{i+1} - x_i\|_2$ .

בין השיטות שנבחנו נמנות רלקסציה סטטית ודינמית בהן הפותרן מעודכן לפי

$$x_{i+1} = x_i + \omega_i r_i. \quad (2)$$

ברלקסציה סטטית (SR)  $\omega_i = \omega$  נשארת קבועה בין האיטרציות. קשה עד מאד לקבוע ערך אופטימלי ל- $\omega$ , כאן נקטנו בשיטה נאיבית לקביעת הערך האופטימלי על ידי ניסוי וטעיה, זאת על מנת לאפשר השוואה לשיטות אחרות בשימוש בערך קרוב לאופטימלי.

ברלקסציה דינמית אנו מתכוונים להרחבה לבעיה רב ממדית של שיטת אייטקן. קיימות מספר הרחבות אפשריות, ראו לדוגמה [5]. מבין ההרחבות השונות המוזכרות ב-[5], האפשרות הפופולרית ביותר בספרות מבוססת על חישוב פרמטר הרלקסציה לפי

$$\omega_i = - \frac{\langle r_{i-1}, r_i - r_{i-1} \rangle}{\langle r_i - r_{i-1}, r_i - r_{i-1} \rangle}. \quad (3)$$

בהמשך נכנה בשם "רלקסציית איטקן" (AR) הפעלה של (3) בצורה רקורסיבית בכל איטרציה, כלומר הכפלת (3) ב- $\omega_{i-1}$ . אפשרות נוספת היא "אייטקן-שטפנסן" (AS) בה יש לחשב את (3) ללא רקורסיה אך רק פעם בשלוש איטרציות, וביתר האיטרציות להשתמש ב- $\omega_i = 1$ .

שיטות נוספות שנבחנו היו מסוג קוואזי-ניוטון. שיטת מיתר היא שיטה המנסה למצוא הערכה למטריצת היעקוביאן ב- $B(x_i), x_i$  מתוך

$$B(x_i) \Delta x_i = r_i - r_{i-1}. \quad (4)$$

רבות משיטות אלו מיועדות לבעיות מינימיזציה ומסתמכות על העובדה שמטריצת ההסיאן סימטרית מוגדרת-חיובית. בבעיות מציאת שורש, ובמיוחד כאשר היעקוביאן לא סימטרי, יש לבחור בשיטה שלא מבוססת על סימטריית המטריצה. במקרה זה בחרנו להשתמש בגרסא דלת זכרון של שיטת ברוידין (LBM). כדי לשמור על היציבות הנומרית השתמשנו בכל האיטרציות הזמינות בתוך אינקרמנט ההעמסה כדי לבנות את ההערכת היעקוביאן.

שיטת קוואזי-ניוטון נוספת שנבחנה היא שיטת אנדרסון (AM) אשר עושה שימוש במספר היכרויות של רזידואלים מאיטרציות קודמות, אשר מספרם נקבע על פי פרמטר  $m_{\max}$ , על מנת לפרוש את המכפלה של ההופכי ליעקוביאן עם הרזידואל בתת-מרחב הקרילוב של הבעיה. אלגוריתמים מפורטים לכל השיטות ניתן למצוא ב-[8].

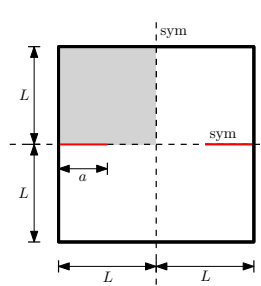
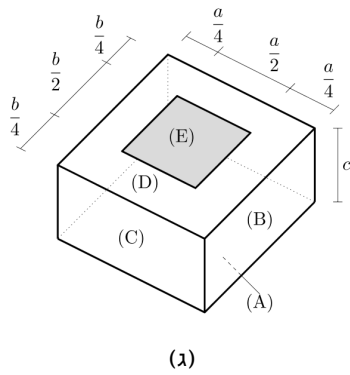
## 4 חקירה נומרית

שיטות ההאצה נוסו על שלוש דוגמאות המדגישות אספקטים שונים של בעיות חישוביות במידול פיזי-פילד של סדקים.

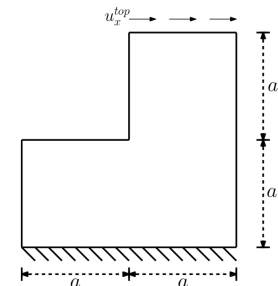
הדוגמא הראשונה היא של גוף בצורת האות L הנתון להזזות אופקיות, ראו איור 1. זוהי דוגמא לסדק יציב (gradual), עם יעקוביאן לא סימטרי עקב משטר מאמצים בגזירה. דוגמא זו חושבה עם מספר אורכי רגולריזציה  $\ell$  כדי להדגים איך השאיפה לסדק חד,  $\ell \rightarrow 0$ , משפיעה על יכולת ההתכנסות של הפותרן לבעיה ועל תפקוד סכימות ההאצה.

הדוגמא השנייה היא של פלטה עם שני סדקי קצה הנתונה למתיחה צירית, ראו איור 1. בדומא זו משטר המאמצים תחת מתיחה בלבד ובהפעלת היסטוריית העמסה מונוטונית מתקבל יעקוביאן סימטרי. בדוגמא זו התקדמות הסדק אינה יציבה (brutal), כלומר הסדק חודר את כל הגוף בתוך אותו אינקרמנט ההעמסה בו הוא התחיל להתקדם, לעומת הדוגמא הקודמת בה לאחר התחלת התקדמות הסדק כל אינקרמנט העמסה קידם קצת את הסדק עד לחדירה מלאה.

הדוגמא השלישית היא של תיבה אשר משטח E בה נמשך החוצה, ראו איור 1. העמסה זו יוצרת טופולוגיית סדק תלת-מימדית בצורת בועה עם בסיס ריבועי. בדוגמא זו אימצנו גם אבולוציית גינצבורג-לנדאו למשתנה הפיזי-פילד, דבר שיצר תלות בין הפותרן של אינקרמנט ההעמסה הנוכחי לפותרן אינקרמנט העמסה הקודם ולא רק לפותרן שדה ההזזות. פרטים נוספים על שלושת הדוגמאות ניתנים ב-[8].



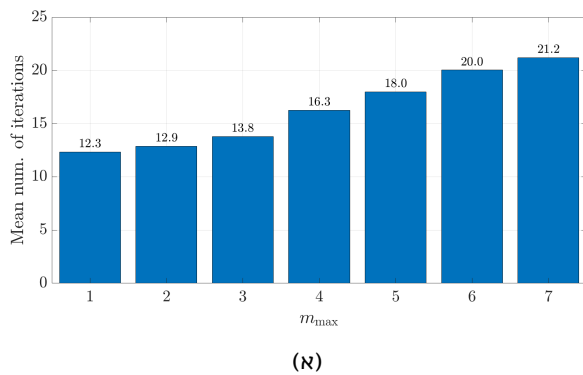
(ב)



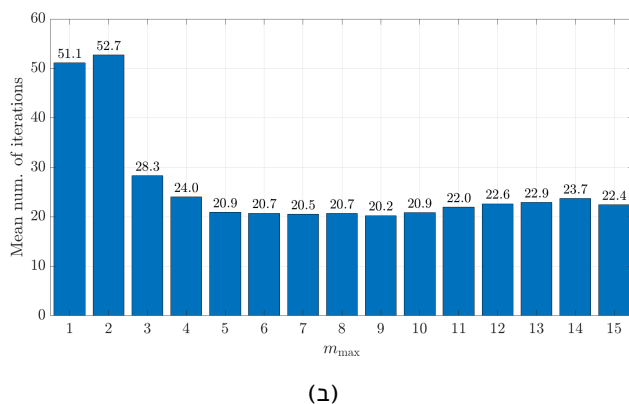
(א)

איור 1: גאומטריה לשלושת הדוגמאות הנומרייות.

זה מספר האיטרציות הממוצע עלה עם הגידול ב-  $m_{\max}$  עד ל-  $m_{\max} = 7$ , מעבר לזה התחילו להתפתח אי-יציבויות.



(א)

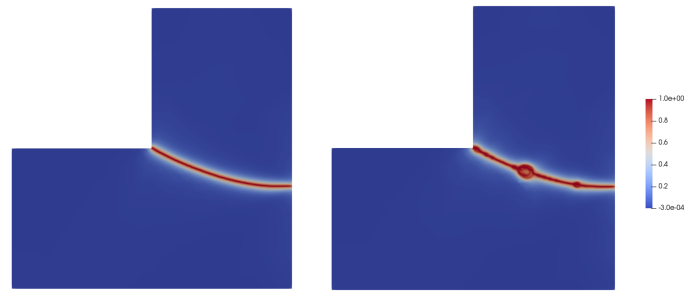


(ב)

איור 3: מספר איטרציות ממוצע להתכנסות של AM+S1. למעלה הדוגמא הראשונה ולמטה הדוגמא השלישית.

כדי להשוות בין השיטות השונות נגדיר את פקטור ההאצה כמספר הממוצע של איטרציות גאוס-זיידל חלקי המספר הממוצע של האיטרציות אשר נדרשו לשיטה המדוברת.

אחת התופעות המעניינות שהתגלו בחקירה הנומרית היא חוסר היציבות של חלק מהשיטות ונטיה להתכנס לפתרונות שונים מאלה של איטרציות גאוס-זיידל (ללא סכימת האצה). בעוד שרוב השיטות הניבו את אותו פרופיל נזק ועקום כח-הזזה כמו איטרציות גאוס-זיידל, שיטת LBM הראתה נטיה להתכנס לפתרונות אחרים. לדוגמא, באיור 2 מוצג פרופיל הנזק כפי שחושב בעזרת איטרציות גאוס-זיידל ובעזרת LBM. תופעה דומה מתקבלת בשימוש ב- AM עם  $m_{\max}$  גדול מדי. שתי שיטות אלו, כאשר הן התכנסו לפתרון הנכון, הראו קצבי התכנסות גבוהים יחסית לשאר השיטות. אך כאמור הן גילו נטיה להתכנס לפתרונות אחרים. במקרים אלו בחינה של התכנסות הרזידואל לא איפשרה זיהוי של התופעה, והתקבלה תמונה של התכנסות רגילה. הדרך היחידה היתה לבחון את הפתרון הסופי, לכן באופן כללי אנו לא ממליצים להשתמש ב- LBM או ב- AM עם  $m_{\max}$  גבוה מדי ללא ידע מוקדם על התוצאה הצפויה.



איור 2: פרופיל הנזק בדוגמא הראשונה. משמאל מחושב בעזרת גאוס-זיידל ומימין בעזרת LBM.

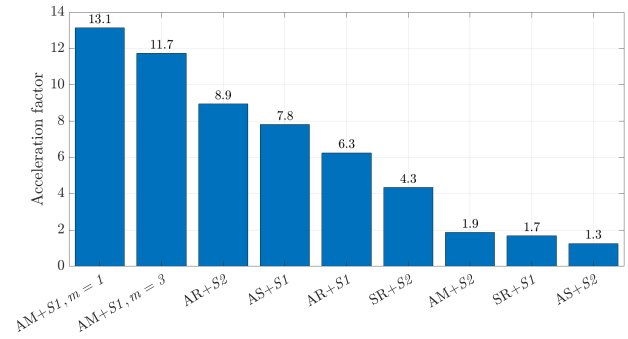
הגדלת  $m_{\max}$  בסכימות AM לרוב עוזרת להאיץ את התכנסות הפתרון הסטגרי, אך כפי שראינו עלולה לגרום לאי-יציבות של השיטה. אכן, בדוגמא השנייה הגדלת  $m_{\max}$  עד 5 הקטינה את מספר האיטרציות הממוצע הנדרש להתכנסות, אך בערכים גדולים מ-5 התחילו להופיע אי-יציבויות. לעומת זאת, בדוגמא השלישית הגדלת  $m_{\max}$  לא הובילה לאי-יציבויות אלא רק להקטנת מספר האיטרציות הממוצע להתכנסות, עד לרוויה סביב  $m_{\max} = 3$ , כפי שניתן לראות באיור 3. יש להעיר שבדוגמא זו שיטת AM השיגה את מספר האיטרציות הממוצע הנמוך ביותר רק בבחירת  $m_{\max} \geq 3$ . עם זאת, לעיתים הגדלת  $m_{\max}$  עלולה לגרום גם לגידול במספר האיטרציות הממוצע, כפי שניתן לראות עבור הדוגמא הראשונה באיור 3א. באיור

## 5 מסקנות

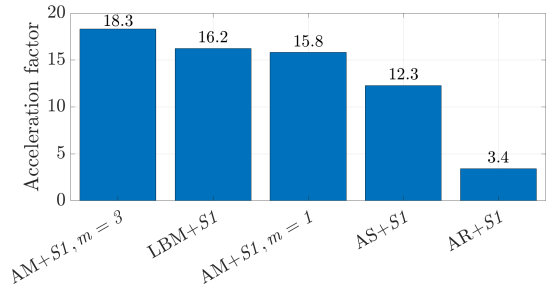
מבין הסכימות שנבחנו כאן, הסכימות הפשוטות ביותר לביצוע הן איטרציות גאוס-זיידל,  $AR+S1$ , ו- $AM+S1$  עם  $m_{\max} = 1$ . סכימות אלו גם הראו אמינות גבוהה בהתכנסות לפתרון המצופה.  $AR+S1$  ו- $AM+S1$  עם  $m_{\max} = 1$  תפקדו יחסית טוב בהאצת הפתרון הסטגרי, לכן בבעיות אשר יש לפתור רק פעם אחת ומבקשים להגיע לפתרון מהיר ואמין היינו ממליצים על אחת משתי שיטות אלו. כאשר יש לפתור קלאס של בעיות עם פרמטרים משתנים היינו ממליצים הטמיע גם  $AM+S1$  עם  $m_{\max} = 3$  ולהשוות את תוצאותיו ל- $AM+S1$  עם  $m_{\max} = 1$  כדי להחליט באיזו שיטה עדיף לפתור את סט הבעיות, הן מבחינת התכנסות לפתרון הצפוי והן מבחינת מספר איטרציות ממוצע. יש לשים לב שלקחת  $m_{\max} > 3$  מגבירה את הסכנה ליצירת אי-יציבויות. בכל מקרה, אנו לא ממליצים על שימוש ב-LBM וב- $AM+S2$  עקב נטייתם לאי-יציבות.

## References

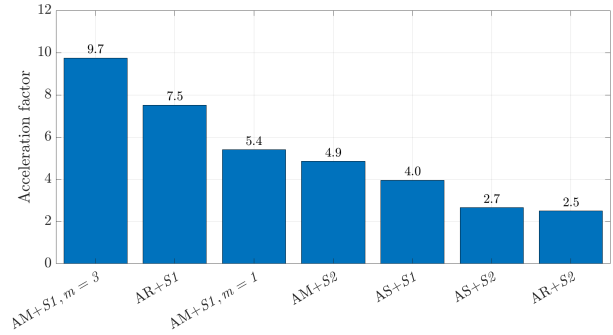
- [1] M. Ambati, T. Gerasimov, and L. De Lorenzis. *Comp. Mech.*, 55:383–405, 2015.
- [2] H. Amor, J.-J. Marigo, and C. Maurini. *J. Mech. Phys. Solids*, 57(8):1209–1229, 2009.
- [3] B. Bourdin, G. A. Francfort, and J.-J. Marigo. *J. Mech. Phys. Solids*, 48(4):797–826, 2000.
- [4] G.A. Francfort and J.-J. Marigo. *J. Mech. Phys. Solids*, 46(8):1319–1342, 1998.
- [5] A. J. Macleod. *Commun. Appl. Numer. Methods*, 2(4):385–392, 1986.
- [6] C. Miehe, M. Hofacker, and F. Welschinger. *Computer Meth. Appl. Mech. Eng.*, 199(45):2765–2778, 2010.
- [7] C. Miehe, F. Welschinger, and M. Hofacker. *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 83(10):1273–1311, 2010.
- [8] Y. Schapira, L. Radtke, S. Kollmannsberger, and A. Düster. *Computer Meth. Appl. Mech. Eng.*, 410:116029, 2023.



(א)



(ב)



(ג)

איור 4: פקטור ההאצה לשיטות השונות בשלושת הדוגמאות שנבחנו, מסודרות מלמעלה למטה.

איור 4 מציג את פקטור ההאצה של השיטות שהתכנסו לשלושת הדוגמאות. בשלושתן האזור כולל את התוצאות של  $AM+S1$  הן עם  $m_{\max} = 1$  והן עם  $m_{\max} = 3$ . ניתן לראות שבכל המקרים ל- $AM+S1$  עם  $m_{\max} = 3$  היו התוצאות הטובות ביותר, או הכמעט טובות ביותר בפער קטן מאד, עם פקטור האצה הנע בין 10-20. יש לשים לב שעד  $m_{\max} = 3$  לא נצפו אי-יציבויות בסכימות AM בדוגמאות שנוסו, ולכן אפשרות זו הניבה את התוצאות הטובות ביותר.

שיטת  $AR+S1$  תפקדה היטב בדוגמא השלישית, אך בצורה משמעותית פחות טובה בדוגמא השנייה. וכן  $AM+S1$  עם  $m_{\max} = 1$  תפקדה היטב בדוגמא הראשונה אך פחות טוב בדוגמא השלישית.  $AM+S1$  עם  $m_{\max} = 3$  היתה הרובוסטית ביותר בכך שהיא תפקדה היטב בשלושת הדוגמאות.