

עלון האיגוד הישראלי לשיטות חישוביות במכניקה

מספר 47

מרץ 2025

עורך: אלעד פריאל, המחלקה להנדסת מכונות, המכללה האקדמית להנדסה סמי שמעון, באר-שבע 84100, טל. 08) 6475884, דואר אלקטרוני: eladp@sce.ac.il

חברי ועד אישח"מ: מיכאל אנגלמן, סלבה קרילוב, אלעד פריאל, פנחס בר-יוסף, יצחק הררי, עמיאל הרשגה, יונתן טל (אחראי האתר), מחמוד ג'בארין (נשיא), ארז גל (מזכיר-גזבר)

איש-קשר עם IACM: דן גבעולי

איש-קשר עם ECCOMAS: מישל ברקובייר

ועדת ביקורת: יורי פלדמן, מרדכי סנטו

אתר אישח"מ (IACMM) באינטרנט: <http://www.iacmm.org.il>

רישום לחברות באגוד ופרטים נוספים: באתר האיגוד הנ"ל, או פנו למזכיר-גזבר, פרופ' ארז גל, טל. 08-6479671, דואר אלקטרוני: erezgal@bgu.ac.il

"שולחן העורר":

בהפרש של מספר חודשים, בשנת 2023, עולם המכאניקה החישובית נפרד משני מדענים שהיו מאבותיו המייסדים. הראשון הינו Prof. Ivo Babuska והשני הוא Prof. Tinsley Oden. כמובן שלא ניתן לתת תיאור מלא של תרומתם המדעית הענפה של השניים בפסקה של חצי עמוד, אך אנסה לתת זרקור על מספר נושאים שייחדו את השניים.

פרופ' Babuska, מתמטיקאי מחונן יליד צ'כיה, התבסס בארה"ב, ראשית באוניברסיטת מרילנד ולאחר מכן באוניברסיטה של אוסטיין בטקסס. מבין התרומות הרבות שלו ניתן לציין את פיתוח הבסיס התיאורטי לשיטת האלמנט הסופי מסדר גבוה (p-FEM) וניסוח התנאים המספקים ליציבות של סכמות משולבות (Mixed formulations).

פרופ' Oden הקים באוניברסיטת אוסטיין שבטקסס את אחד ממרכזי המחקר המובילים בתחום המכאניקה החישובית כיום. הוא היה ידוע בתרומתו לחיבור בין עולם ההנדסה לעולם המכאניקה החישובית. הוא חיבר יותר מ-57 ספרים, כולל הספר Finite Elements of Nonlinear Continua.

תרומתם של שני מדענים גדולים אלו תלויה עוד דורות רבים של חוקרים ומהנדסים.

כמובן, שלא אסיים מבלי לשלוח ברכת הצלחה לכל חיילנו שעדיין נמצאים במערכה במסגרת מלחמת חרבות ברזל ותפילות לשובם הבטוח של החטופים שכולנו עדיין מחכים לשחרורם.

מידע נוסף על האיגוד ועל מכאניקה חישובית בארץ ובעולם תמצאו ב <http://www.iacmm.org.il>. באתר תוכלו לצרף עצמכם (ללא תשלום) לרשימת התפוצה האלקטרונית, להירשם כחברים באיגוד או לחדש את חברותכם. טופס רישום לאיגוד ניתן למצוא ב:

<http://www.iacmm.org.il/member>

עדכונים מיום העיון הקודם:

יום העיון ה-52 התקיים ב-23 למאי 2024 באוניברסיטת בן גוריון. המארגנים המקומיים היו פרופ' יורי פלדמן וד"ר פבל טרפר.

יום העיון כלל 12 הרצאות בנושאים מגוונים שניתנו בשלושה מושבים, וכלל גם שתי הרצאות מפתח.

הרצאת המפתח הראשונה שכותרתה A Hierarchical Algebraic Compression-Based Approach for Fast Numerical Solution of Hybrid Integral Equations and Many-Body Problems of Acoustic Scattering הועברה על ידי ד"ר יניב בריק מהחלקה להנדסת חשמל ומחשבים מאוניברסיטת בן גוריון.

הרצאת המפתח השנייה שכותרתה Numerical Models of Left Ventricular Expanders for Heart Failure: Optimization of Functionality and Durability הועברה על ידי פרופ' גיל מרום מבית הספר להנדסה מכאנית באוניברסיטת תל אביב.

כלל ההרצאות ביום העיון עוררו עניין רב במשתתפים.



ISC52 – הוועד המנהל של האיגוד והמארגנים המקומיים.

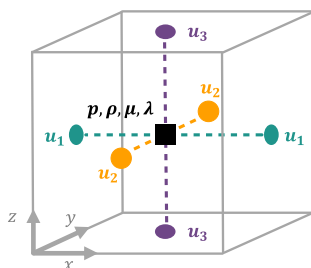
בלתי-מוגדרת (indefinite). שנית, המטריצה המתקבלת מאד גדולה: כדי למדל גלים בעלי תדר גבוה, נדרשים סריגים מאד עדינים. עבור הגרסה האלסטית, שהיא מערכת של משוואות הממדלות גלי לחץ וגלי גזירה, המטריצה גדולה אף יותר. יתר על כן, בחומר אלסטי כמעט בלתי-דחיס, גורם הגראד-דיב שולט על פני הגורם הלפליאיני, מה שמקשה עוד יותר על הפתרון, שכן לאופרטור זה יש מרחב אפס עשיר. רוב הפותרנים הקיימים למשוואות הלמהולץ האקוסטיות מבוססים על שיטות חלוקה לתחומים או על שיטות רב-סריג, בפרט שיטת הלפליסאן המוזח (shifted Laplacian) (multigrid). ישנן גם מגוון דיסקרטיזציות של הפרשים סופיים שהוצעו למשוואה זו: ביניהן דיסקרטיזציות מסדר רביעי ושישי, קומפקטיות או לא קומפקטיות, חלקן פותחו על מנת למזער את הדיספרסיה הנומריית. אלא שחרף קיומן של דיסקרטיזציות משוכללות, ברוב העבודות בספרות בנושא פותרנים – נעשה שימוש בדיסקרטיזציות הפשוטות ביותר. הפער הזה, בין דיסקרטיזציות לפותרנים, הוא חמור אף יותר במקרה של משוואות הלמהולץ האלסטיות: מעט מאד פותרנים הוצעו, רובם פחות יעילים מאשר במקרה האקוסטי, וקשה למצוא בספרות דיסקרטיזציות קומפקטיות למשוואה זו. מטרתנו היא לתרום לסגירת הפער הזה.

רקע מתמטי

משוואות הלמהולץ האלסטיות היא מערכת מד"ח הנתונה ע"י
$$H\vec{u} = \left(\vec{\nabla} \cdot \mu \vec{\nabla} + \nabla(\lambda + \mu) \nabla \cdot + \rho \omega^2 (1 - \gamma i) \right) \vec{u} = \vec{q}$$
 כאשר $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ הוא ההעתק, ρ היא צפיפות התווך, $\omega = 2\pi f$ היא התדירות הזוויתית, γ היא השיכוך (אטניואציה), והמקדמים λ, μ הנקראים מקדמי לָמָה, מביעים את יחסי המאמץ-מעוות של התווך. אגף ימין $\vec{q}$ הוא מקור הגלים. מהירות גלי הלחץ נתונה ע"י $V_p = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$ ומהירות גלי הגזירה נתונה ע"י $V_s = \sqrt{\mu/\rho}$. בעבודה [1] הוצע ניסוח מעורב למשוואות הלמהולץ האלסטיות. ע"י הצגת משתנה "לחץ" $p = -(\lambda + \mu) \nabla \cdot \vec{u}$ מתקבלת המערכת:

$$(1) \quad H_{mixed} \begin{pmatrix} \vec{u} \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\vec{\nabla} \cdot \mu \vec{\nabla} - \rho \omega^2 (1 - \gamma i) & \nabla \\ -\nabla \cdot & -\frac{1}{\lambda + \mu} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{u} \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{q} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

נבצע דיסקרטיזציה למשוואה (1) באמצעות סכימת MAC – marker and cell (1) במצעות סכימת – פאה אחרת של תא הדיסקרטיזציה, ומשתנה הלחץ המלאכותי שיצרנו – כמו גם המקדמים הפיזיקליים – מונחים במרכזי התאים, ר' איור 1.



איור 1 – מיקומי המשתנים בדיסקרטיזציות MAC תלת-ממדית. מוצג ברשות מ-Yovel & Treister 2024 [2].

כמו בכל שנה, גם השנה מתקיימת תחרות הרצאות של סטודנטים לתארים מתקדמים הניתנות בימי העיון. בכל אחד מימי העיון ה-52 וה-53, תיבחר הרצאה מצטיינת. במסגרת זו, הזוכה בהרצאה המצטיינת ליום העיון ה-52 הייתה רחלי יובל (סטודנטית של פרופ' ערן טרייסטר) מהמחלקה למדעי המחשב באוניברסיטת בן גוריון. מי שפספס את ההרצאה המצוינת של רחלי, יוכל לקרוא מאמר קצר שכתבה על נושא ההרצאה בהמשך עלון זה.

ISC-53

לאחר דחיה נוספת, עקב מלחמת חרבות ברזל, יום העיון ה-53, יתקיים באפקה, המכללה האקדמית להנדסה בתל אביב. המארגנים המקומיים הינם ד"ר אורי אלבוחר וד"ר שרה נפתלי.

שיטת רב-סריג חופשיה ממטריצות למשוואות הלמהולץ האלסטיות

רחלי יובל¹ ופרופ' ערן טרייסטר¹
¹המחלקה למדעי המחשב, אוניברסיטת בן-גוריון בנגב, באר-שבע, ישראל

פתיח

נציג כאן שיטת רב-סריג חופשיה ממטריצות לפתרון משוואות הלמהולץ האלסטיות, המצוידת בדיסקרטיזציה מתאימה. דיסקרטיזציות רבות הוצעו בספרות למשוואות הלמהולץ, כמו גם פותרנים רבים, כמה מהם מותאמים אף לגרסה האלסטית. עם זאת, יש מעט מאד עיסוק ביחסי הגומלין שבין דיסקרטיזציה לפותרן. ברצוננו לגשר על הפער הזה. ע"י בחירת סטנסיל (גרעין קונבולוציה) מתאים לרה-דיסקרטיזציה בסריג הגס, מתאפשרת שיטת רב-סריג שניתן לממשה בצורה חופשית ממטריצות, ע"י קונבולוציות כנגד סטנסילים בלבד. תכונה זו היא קריטית למימוש יעיל על חומרה מודרנית, כגון GPU. משקולות הדיסקרטיזציה כווננו ע"י אנליזת פורייה מקומית, כך שיובילו להתכנסות מיטבית של שיטת הרב-סריג. בצורה זו, מתקבל פותרן רב-סריג סקיליבילי עבור בעיות הלמהולץ אלסטיות במדיה הטרוגנית בדו-ממד ובתלת-ממד. מאמר זה מכיל תוצאות עיקריות של הפרסומים [1] ו-[2].

הקדמה

משוואות הלמהולץ היא משוואות הגלים במרחב התדר (כלומר, טרנספורם פורייה של משוואות הגלים), ויש לה שימושים רבים. ביניהם, אקוסטיקה, אלקטרומגנטיות, טומוגרפיה ועוד. אחד היישומים החשובים הוא היפוך גל מלא Full Waveform Inversion (FWI), בעיה הפוכה המשמשת לשחזור מידע על התחום מתוך תבנית הגלים המתקבלת על שפת התחום. בעיה הפוכה זו נמצאת בשימוש נרחב בתחום של איתור חללים בקרקע, כדוגמת חיפוש גז ונפט. בחלק מן השימושים למשוואות הלמהולץ, מודל אקוסטי אינו מתאר נאמנה את התווך: למשל, בטומוגרפיה של המוח, ובהיפוך גל מלא עבור תווך אלסטי, כגון תת-קרקע. משוואות הלמהולץ האלסטיות, המשמשות למידול גלים בתווך אלסטי במרחב התדר, מספקת מענה לצורך זה.

משוואות הלמהולץ, הן האקוסטיות והן האלסטיות, ידועות כקשות מאד לפתרון באמצעים נומריים. ראשית, המערכת הלינארית המתקבלת לאחר דיסקרטיזציה היא מרוכבת, והיא

בחירת המשקולות לדיסקרטיזציה זו, הוא האתגר המשמעותי בבניית שיטת רב-סריג חופשית ממטריות.

שיטות רב-סריג הן משפחה של שיטות איטרטיביות לפתרון מד"ח [3] המבוססות על התובנה הבאה: שיטות רלקסציה, כגון יעקובי או גאוס זיידל, מחלקות את השגיאה. דהיינו, הן מנחיתות את מודי השגיאה האוסילטוריים, אך כמעט ואינן משנות את מודי השגיאה החלקים. ב-[3] הוצע לאחר רלקסציה לרדת לסריג גס יותר, לבצע שם פתרון מדויק, ולתקן את השגיאה בהתאם. תהליך זה נקרא תיקון הסריג הגס, והוא מנחית את מודי השגיאה החלקים, בעלי תדר נמוך. הבעיה היא ששיטות רלקסציה סטנדרטיות הן לא יציבות לבעיות לא-מוגדרות (indefinite), כגון הלמהולץ, ואף תיקון הסריג הגס יכול לנפח את השגיאה במקרה שיש לאופרטור ע"ע בעלי סימן שונה. שיטת הלפליסאן המוזח [4] מציעה תרופה לבעיות אלה: נגדיר את אופרטור הלמהולץ המוזח

$$H_s = H + i\alpha\omega^2$$

כאשר α הוא פרמטר הזחה נבחר. על האופרטור המוזח ניתן להפעיל שיטות רב-סריג (שכן ערכיו העצמיים הורחקו מהראשית), ולהשתמש בו כפרקונדישנר לאופרטור המקורי. משמע, לפתור את המערכת $H_s^{-1}Hx = H_s^{-1}q$ כאשר כל היפוך של האופרטור המוזח מקורב ע"י סבב רב-סריג אחד. מבחינה פיזיקלית, הוספת ההזחה הרי היא כהוספת שינוך מלאכותי. שיטה זו הומצאה עבור משוואת הלמהולץ האקוסטית, ואינה מניבה תוצאות משביעות רצון מיישום ישיר שלה על משוואת הלמהולץ האלסטית, בהעדר התאמות.

שיטת הלפליסאן המוזח למשוואת הלמהולץ האלסטית

בעבודה [1] הצענו ליישם שיטה זו על משוואת הלמהולץ האלסטית בניסוח המעורב, כלומר על H_{mixed} במקום על H , ובנוסף להשתמש ברלקסציית ונקה (Vanka): רלקסציית בלוק-יעקובי בה עוברים על כל המשתנים הקשורים לאותו תא בדיסקרטיזציה בו-זמנית. כך ניתן להגיע להתכנסות השיטה עבור הלמהולץ האלסטית בקצב דומה להתכנסותה של השיטה המקבילה עבור משוואת הלמהולץ האקוסטית. לא זו בלבד, אלא ששיטה זו נותנת התכנסות סקילבילית ביחס ליחס פואסון $\sigma = \lambda/2(\lambda + \mu)$. משמע, גם במקרה הכמעט בלתי דחיס, כאשר יחס פואסון שואף ל-0.5, קצב ההתכנסות הוא בערך אותו דבר. זהו הישג משמעותי שכן ביישומים קודמים של שיטות רב-סריג למשוואת הלמהולץ האלסטית, כמות האיטרציות עלתה עבור המקרה הכמעט בלתי דחיס.

פיתוח דיסקרטיזציה לשיטה חופשית ממטריות

אחד החסרונות הבולטים של השיטה שתוארה לעיל, הוא היותה מבוססת מטריצות. נסמן ב- R וב- P את האופרטורים הבין-סריגיים, קרי, הרסטריקציה והפרולונגציה המשמשים למעבר בין הסריגים בשיטת רב-סריג. לרוב, מדובר באופרטורים המתאימים לאינטרפולציה בי-לינארית או לאינטרפולציה מסדר גבוה יותר. בהנתן מטריצה A_h המהווה דיסקרטיזציה של אופרטור דיפרנציאלי נתון על הסריג העדין, ישנן שתי דרכים להגדיר את הקירוב של A_h על הסריג הגס:

- הגסת גלרקין: $A_H = RA_hP$
 - רה-דיסקרטיזציה: דיסקרטיזציה מחדש של אותו אופרטור באמצעות אותה סכימה, על סריג גס יותר.
- הגסת גלרקין יעילה מאד מבחינת התכנסות (ניתן להוכיח, למעשה, שהשיטה היתה מתכנסת בסבב רב-סריג אחד אילו השגיאה היתה בתמונה של הפרולונגציה), אולם היא מחמירה

את סיבוכיות האופרטור מרמה לרמה, ולפחות במימוש נאיבי, דורשת החזקת המטריות בזכרון והכפלה שלהן. רה-דיסקרטיזציה, לעומת זאת, מאד חסכונית בזכרון ומתאימה למימוש יעיל על GPU. אולם שימוש ברה-דיסקרטיזציה, כאשר המשקולות של הדיסקרטיזציה נבחרים לפי סכימות מרכזיות מסדר שני, מניב התכנסות איטית. בעבודה [1] השתמשנו בהגסת גלרקין, ואילו בעבודה [2] פיתחנו סכימת דיסקרטיזציה שתניב התכנסות יעילה בעת שימוש ברה-דיסקרטיזציה.

כדי לפתח דיסקרטיזציה מתאימה להלמהולץ האלסטית בניסוח מעורב (1), שאבנו השראה מדיסקרטיזציה קיימת (מסדר רביעי) עבור הלמהולץ האקוסטית, שהוצגה ב-[5], בעלת הלפליסאן מסדר גבוה הנתון ע"י

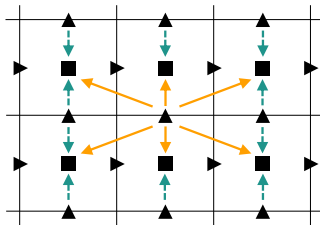
$$(2) \quad L^{Ho} = \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} -1/6 & -2/3 & -1/6 \\ -2/3 & 10/3 & -2/3 \\ -1/6 & -2/3 & -1/6 \end{bmatrix}$$

ומטריצת מסה 5-אלכסונית. במאמר זה, סוגריים מרובעים מסמנים סטנסיל חישובי (גרעין הקונבולוציה).

המבנה של משוואת הלמהולץ האלסטית במדיה הטרונגית ובניסוח מעורב (1) מאלץ אותנו למצוא דיסקרטיזציה לגרדיינט ולדיברגנץ בנפרד. שתי אבחנות עיקריות שירתו אותנו בבחירת הדיסקרטיזציה לנגזרות הראשונות. ראשית, שמנו לב שכל סטנסיל סימטרי של 9 נק' עבור הלפליסאן הינו צירוף קמור של הלפליסאן הרגיל (הפרש מרכזי) והלפליסאן הבורגי (skew):

$$\frac{1}{h^2} \left(\beta \begin{bmatrix} & -1 & \\ -1 & 4 & -1 \\ & -1 & \end{bmatrix} + (1 - \beta) \begin{bmatrix} -1 & & \\ & 4 & \\ -1 & & -1 \end{bmatrix} \right)$$

וכאשר הקבוע הוא $\beta = 2/3$ מתקבל בדיוק הלפליסאן (2). שנית, מהפעלה של גרדיינט בעל סטנסיל של 2 נק' ודיברגנץ בעל סטנסיל של 6 נק' - או להפך - מתקבל לפליסאן בעל 9 נק', ר' איור [2].

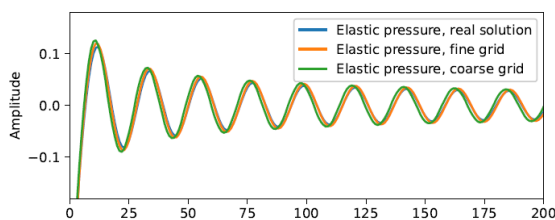


איור 2 – תשעת הקודקודים המושפעים מנגזרת בעלת סטנסיל 2 נק' מורכבת על נגזרת בעלת סטנסיל 6 נק'. מוצג ברשות מ-Yovel & Treister 2024 [2].

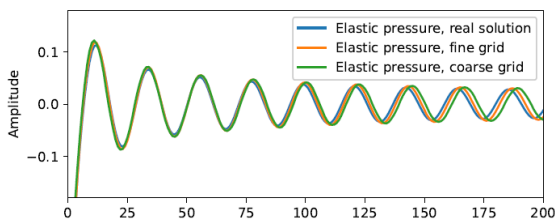
בהתבסס על תובנות אלה, בעבודה [2] הוצעה הדיסקרטיזציה

$$\begin{pmatrix} -\vec{\nabla}_h^T A_e(\mu) \vec{\nabla}_h^\beta + \omega^2 M^\beta & (\nabla \cdot)_h^T \\ (\nabla \cdot)_h^\beta & \text{diag} \left(\frac{1}{\lambda + \mu} \right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{u} \\ \vec{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{q} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4)$$

כאשר $\nabla_h, (\nabla \cdot)_h$ הם הגרדיינט והדיברגנץ הסטנדרטיים על סכימת MAC המוגדרים עם משקולות של הפרשים סופיים (סטנסיל בן 2 נק'), ואילו $\nabla_h^\beta, (\nabla \cdot)_h^\beta$ הם הגרדיינט והדיברגנץ המרוחים על פני סטנסיל בן 6 נק', אשר הפעלתם יחד עם גרדיינט/דיברגנץ סטנדרטיים מובילה לסטנסיל בעל 9 נק' ללפליסאן (3) עם אותו קבוע β . מטריצת המסה M^β מרוחה ע"פ סטנסיל חישובי של 5 נק', בדומה ל-[5]. לפרטים, ר' [2].



(c) $\beta = 2/3$



(d) $\beta = 0.5$

איור 3 – דיספרסיה נומרית עבור ערכי β שונים. מוצג ברשות מ-Yovel & Treister 2024 [2].

בניסוי השני פתרנו את משוואת הלמהולץ האלסטית בניסוח מעורב עם שיטת רב-סריג שבה אופרטור הסריג הגס נקבע ע"י רה-דיסקרטיזציה. ניתן לראות שבשימוש בדיסקרטיזציה (4) עם קבוע $\beta = 2/3$ ניתן להפחית עד פי 2 את כמות האיטרציות, לעומת שימוש בקבוע $\beta = 1$ (שהוא שקול לדיסקרטיזציה הסטנדרטית מסדר שני). בניסוי זה השתמשנו במודל מרמוס-2 האלסטי [7], המבוסס על נתוני קרקע שנמדדו באגן קוונזה באפריקה.

$\beta = 2/3$		$\beta = 1$		מספר תאים / רמות
4	3	4	3	
100	67	147	107	544×112
157	102	238	172	1088×224
238	137	374	243	2176×448

טבלה 1 – מספר איטרציות GMRES עם פרקונדישנר של לפליסיאן מוזח עבור משוואת הלמהולץ האלסטית בניסוח מעורב במדיה מסוג מרמוס-2. אופרטור הסריג הגס נקבע ע"י רה-דיסקרטיזציה כנגד הסכימה (4). מוצג ברשות מ-Yovel & Treister 2024 [2].

מסקנות

בעבודה זו הוצגה שיטת רב-סריג למשוואת הלמהולץ האלסטית ע"פ [1], ודיסקרטיזציה המאפשרת יישום חופשי ממטריות של שיטה זו, ע"פ [2]. משקולות הדיסקרטיזציה נבחרו כדי לאפשר התכנסות מיטבית של שיטת הרב-סריג, והפחתה של כמות הדיספרסיה הנומריית בין הסריגים. שיטה זו מפחיתה משמעותית את מספר האיטרציות הדרוש לפתרון של משוואת הלמהולץ האלסטית, ומאפשרת מימוש יעיל מבחינת זכרון. יתר על כן, השיטה מתאימה למימוש חופשי ממטריות וליישום על חומרה מודרנית.

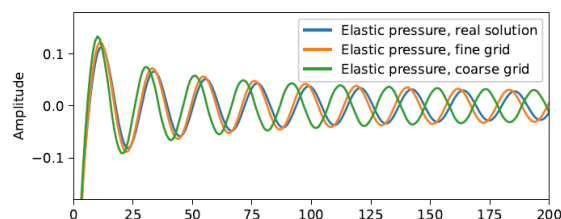
מקורות

[1] E. Treister and R. Yovel. A hybrid shifted Laplacian and domain decomposition preconditioner for the elastic Helmholtz equations, Journal of Computational Physics, 497 (2024), p. 112622.

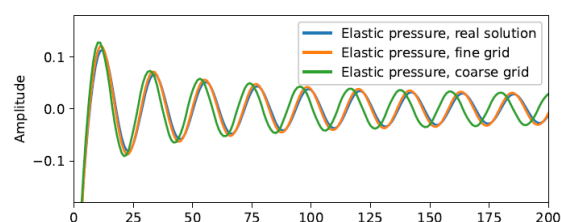
בחירת הקבוע β נעשתה באמצעות אנליזת פורייה מקומית (LFA – local Fourier analysis). זהו כלי חיזוי הנועד לעיצוב שיטות רב-סריג, וחוזר את קצב התכנסותן. ע"פ החישובים המפורטים ב-[2], הקבוע האופטימלי לטובת התכנסות שיטת רב-סריג בעלת שני סריגים, הוא $\beta = 2/3$. ע"פ התוצאות ב-[5], ניתן להסיק כי הקבוע $\beta = 2/3$ ממזער את שגיאת הקיטוע, עבור משוואת הלמהולץ האקוסטית. מעניין לראות שאותו קבוע הוא מיטבי גם מבחינת התכנסות שיטת רב-סריג עבור משוואת הלמהולץ האלסטית.

תוצאות נומריות עיקריות

כפי שהובחן ב-[6], התכנסות מיטבית של שיטות מולטיגריד עבור משוואות הלמהולץ תלויה במזעור הדיספרסיה הנומריית. דיספרסיה נומרית הינה סטיה של אורך הגל של פתרון האופרטור לאחר דיסקרטיזציה בהשוואה לאורך הגל המתקבל מפתרון האופרטור הרציף. אפילו סטיה קטנה, לאחר כמה מחזורים יכולה להצטבר לפער משמעותי. ביתר פירוט, ב-[6] הראו שעל מנת ששיטת רב-סריג תתכנס היטב למשוואות גלים במרחב התדר, על אורך הגל המתקבל מהדיסקרטיזציה בסריג העדין להיות דומה ככל האפשר לאורך הגל המתקבל מהדיסקרטיזציה בסריג הגס. הניסוי הראשון שנציג, בוצע ע"י דיסקרטיזציה לפי הסכימה (4) עם ערכי β שונים, ופתרון ישיר של האופרטור לאחר דיסקרטיזציה. לאחר מכן, נלקח חתך של הפתרון הישיר מנק' מקור הגלים ועד לשפת התחום, במקביל לציר האנכי. באיור 3 ניתן לראות שגם הדיספרסיה הנומריית היא בקירוב מזערית עבור $\beta = 2/3$.



(a) $\beta = 1$



(b) $\beta = 0.8$

- [2] R. Yovel, E. and E. Treister. *LFA-tuned matrix-free multigrid for the elastic Helmholtz equation*, SIAM Journal on Scientific Computing, (2024), pp. S1–S21.
- [3] A. Brandt, Multi-level adaptive solutions to boundary-value problems, Math. Comp., 31 (1977), pp. 333--390.
- [4] Y. A. Erlangga, C. W. Oosterlee, and C. Vuik, A novel multigrid based preconditioner for heterogeneous Helmholtz problems, SIAM J. Sci. Comput., 27 (2006), pp. 1471--1492, <https://doi.org/10.1137/040615195>.
- [5] I. Singer and E. Turkel, High-order finite difference methods for the Helmholtz equation, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 163 (1998), pp. 343--358.
- [6] C. C. Stolk, M. Ahmed, and S. K. Bhowmik, A multigrid method for the Helmholtz equation with optimized coarse grid corrections, SIAM J. Sci. Comput., 36 (2014), pp. A2819--A2841, <https://doi.org/10.1137/13092349X>.
- [7] G. S. Martin, R. Wiley, and K. J. Marfurt, Marmousi2: An elastic upgrade for Marmousi, The Leading Edge, 25 (2006), pp. 156--166.