

עלון האיגוד הישראלי לשיטות חישוביות במכניקה

מספר 48

דצמבר 2025

עורך: אלעד פריאל, המחלקה להנדסת מכונות, המכללה האקדמית להנדסה סמי שמעון, באר-שבע 84100, טל. 08) 6475884, דואר אלקטרוני: eladp@sce.ac.il
חברי ועד אישח"מ: מיכאל אנגלמן, סלבה קרילוב, אלעד פריאל, פנחס בר-יוסף, יצחק הררי, עמיאל הרשגה, יונתן טל (אחראי האתר), מחמוד ג'בארין (נשיא), ארז גל (מזכיר-גזבר)
איש-קשר עם IACM: דן גבעולי
איש-קשר עם ECCOMAS: מישל ברקובייר
ועדת ביקורת: יורי פלדמן, מרדכי סנטו
אתר אישח"מ (IACMM) באינטרנט: <http://www.iacmm.org.il>
רישום לחברות באגוד ופרטים נוספים: באתר האיגוד הנ"ל, או פנו למזכיר-גזבר, פרופ' ארז גל, טל. 08-6479671, דואר אלקטרוני: erezgal@bgu.ac.il

מ-"שולחן העורר":

ההרצאה המרתקת עסקה בסינרגיה בינה מלאכותית לחישובים רב תחומיים (Multiphysics) ומרובי סקאלות (Multiscale). לאחר מכן כלל יום העיון עוד 11 הרצאות שניתנו בשלושה מושבי הרצאה. המארגנים הצליחו לשלב מגוון רחב של נושאים הנוגעים לעולם המכאניקה החישובית. ההרצאות כללו ניתוח אי יציבות למיקרופלטות תחת לחץ העוברות שפעול אלקטרו-מכאני, חקר חישובי של עקום הציפוף בדחיסת אבקות מתכת-קרמיקה, חקר חישובי של השלבים הראשוניים בשחרור סילון מימן תחת לחץ ועוד נושאים מעניינים אחרים.



ISC53 –הוועד המנהל של האיגוד, האורח והמארגנים המקומיים.

כמו בכל שנה, גם השנה מתקיימת תחרות הרצאות של סטודנטים לתארים מתקדמים הניתנות בימי העיון. בכל אחד מימי העיון ה-52 וה-53, תבחר הרצאה מצטיינת. במסגרת זו, הזוכה בהרצאה המצטיינת ליום העיון ה-53 היה עמית אסייג (סטודנט של פרופ' דן גבעולי) מהמחלקה לאווירונאוטיקה וחלל בטכניון. אני מודה מאד לעמית על שהסכים לכתוב את המאמר המופיע בעלון זה.

העשור הנוכחי מסמן מהפכה באופן שבו אנו מפתחים, פותרים ומפרשים בעיות מכאניות. לצד שיטות החישוב המסורתיות, כגון שיטת האלמנט הסופי נכנסת הבינה המלאכותית ככלי משלים המרחיב את גבולות היכולת. אלגוריתמים מבוססי למידה עמוקה מאפשרים האצה משמעותית של חישובים עתירי משאבים, איתור דפוסים חבויים בנתונים ניסויים, והערכת תכונות מכאניות במקרים בהם המידע הפיסיקלי חלקי או מורכב. מודלים היברדיים, המשלבים ידע פיסיקלי עם למידת מכונה, מציעים דיוק רב יותר ויכולת הכללה טובה, תוך שמירה על עקרונות היסוד של המכאניקה. בשנים הקרובות הבינה המלאכותית תהווה כלי חיוני עבור כולנו בעולם המחקר הפיתוח והיישום. וביננו, חברי איגוד יקרים...אם הגעתם עד לכאן יש סיכוי לא רע שגם שורות אלו נכתבו על ידי בינה מלאכותית.

אני רוצה להודות לד"ר ירון שפירא מהמרכז למחקר גרעיני בנחל שורק שסייע לי רבות בהכנת העלון הנוכחי.

מידע נוסף על האיגוד ועל מכאניקה חישובית בארץ ובעולם תמצאו ב <http://www.iacmm.org.il>. באתר תוכלו לצרף עצמכם (ללא תשלום) לרשימת התפוצה האלקטרונית, להירשם כחברים באגוד או לחדש את חברותכם. טופס רישום לאיגוד ניתן למצוא <http://www.iacmm.org.il/member>

עדכונים מיום העיון הקודם:

יום העיון ה-53 התקיים ב-27 למרץ 2025 במכללה האקדמית להנדסה אפקה. המארגנים המקומיים היו ד"ר אורי אלבוחר וד"ר שרה נפתלי.

יום העיון נפתח בהרצאת מפתח של Prof. Adnan Ibrahimbegovic, Universite de Technologie Compiègne – Alliance Sorbonne Université, France

יום העיון ה-54 יתקיים ב-25.12.25 בפקולטה להנדסה אזרחית וסביבתית בטכניון. המארגנים המקומיים יהיו ד"ר חזי גריסארו וד"ר ניקולו פוליני.

זיהוי הצורה ותכונות החומר של אינקלוזיה בתווך אלסטי

בעזרת שיטת צמוד תליות-זמן

מר עמית סייג

הפקולטה להנדסת אווירונטיקה וחלל, הטכניון

תקציר

המאמר עוסק בבעיה ההופכית של זיהוי אינקלוזיה – אזור בלתי ידוע בתוך חומר, שבו תכונות החומר שונות מתכונות הרקע. הבעיה רלוונטית לתחומים רבים, ובהם בדיקות אל-הרס, גיאופיזיקה, דימות רפואי ועוד. שיטת הזיהוי מבוססת על היפוך גלים מלא (FWI – Full Waveform Inversion) בשילוב שיטת הצמוד. בפרסום קודם פותחה שיטה לזיהוי הצורה המדויקת של חור (מקרה קיצון של אינקלוזיה שבו תכונות החומר הופכות לרכות באופן אינסופי) בתווך אקוסטי. מאמר זה מרחיב את הפרסום בשלושה אופנים. ראשית, התווך הוא אלסטי ולא אקוסטי. שנית, הפגם הוא אינקלוזיה ולא חור. שלישית, נעשה ניסיון לזהות הן את הצורה המדויקת והן את תכונות החומר של האינקלוזיה, בו-זמנית. ניסיון זה הצליח באופן חלקי בלבד, והסיבות לכך מנותחות.

הקדמה

זיהוי של גופים זרים או אזורים פגומים בתוך חומר – כגון אינקלוזיות, חללים או סדקים – הוא בעיה מרכזית במגוון תחומים הנדסיים ומדעיים. בין התחומים הבולטים שבהם בעיה זו עולה ניתן למנות בדיקות אל-הרס של מבנים, חקר תת-הקרקע בגיאופיזיקה, דימות רפואי המבוסס על גלי קול או גלי אולטראסאונד, ואף תחומים כמו אקוסטיקה ימית וביולוגיה ימית. בעיות מסוג זה מוגדרות כבעיות ההופכיות (inverse problems) והן נחשבות בעיות מתמטיות מאתגרות במיוחד: לרוב הן בעלות פתרון לא יחיד, לא יציבות, ורגישות לרעשי מדידה. המטרה היא, על בסיס מדידות של שדה הגלים (למשל, מהירות, תזוזה, לחץ), להסיק את תכונות האובייקט הבלתי ידוע: מיקום, גודל, צורה גיאומטרית ותכונות חומר. זיהוי כזה חשוב במיוחד כאשר אין גישה פיזית ישירה לאזור הנבדק – למשל, בבדיקות סדקים בתוך כנף מטוס, או בזיהוי פגמים בתוך מבנה תת-קרקעי. במהלך השנים פותחו מספר שיטות חישוביות בולטות לבעיות זיהוי כאלה, ובהן:

- Arrival Time Imaging (ATI) – שיטה מהירה יחסית, המבוססת על ניתוח זמני ההגעה של הגלים ממקורות לחיישנים. סטייה בזמני ההגעה מצביעה על הפרעה בתווך.
- Time Reversal (TR) – שיטה המבוססת על החזרת הגלים אחורה בזמן, כך שהם יתכנסו חזרה למקור. מבוצע חיפוש של הפגם שמוביל להתכנסות למקור הנכון.
- Linear Sampling Method (LSM) – שיטה אנליטית הבודקת את תגובת השדה המופרע למקורות מכיוונים שונים, במטרה לשחזר את צורת האובייקט.
- Full Waveform Inversion (FWI) – שיטת אופטימיזציה המחפשת את הפרמטרים שמתאימים למדידות המתקבלות, תוך שימוש בפתרון מלא של משוואות הגלים. FWI נחשבת לשיטה בעלת פוטנציאל גבוה, שכן היא עושה שימוש בכל המידע הגלי הזמין – הן בעוצמות והן בזמנים –

ולא רק בזמני הגעה או תדירים בודדים. עם זאת, מדובר בשיטה חישובית יקרה, ולעיתים בלתי יציבה. לצורך ביצוע FWI, מגדירים פונקציונל על בסיס ההפרש בין המדידות האמיתיות לבין הפתרון המחושב של משוואות הגלים (עבור פגם משוער). השיטה מחפשת את הפגם אשר ממזער את ערך הפונקציונל, תחת האילוצים לקיום המשוואות הדיפרנציאליות השולטות על התפשטות האותות ולקיום תנאי ההתחלה והשפה הנלווים להן. באופן מתמטי, הבעיה שיש לפתור היא: מזער את

$$(1) \quad \Pi[p] = \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Omega_M} |u(p) - u_M|^2 d\Omega dt + R[p, u(p)]$$

תחת האילוץ כי u מקיים את המשוואות השולטות בתווך, תנאי השפה וההתחלה הנתונים. בביטוי שלעיל p הוא וקטור של פרמטרים בלתי ידועים אשר מגדירים את הפגם, $u(p)$ הוא שדה הגלים שמתאים לפגם המוגדר לפי u_M, p הם מדידות של הגלים בתחום Ω_M , ו- R הוא איבר רגולריזציה. שיטות מבוססות גרדיאנט, כגון שיטת הצמוד (Adjoint Method), מהוות רכיב קריטי ב-FWI, שכן הן מאפשרות חישוב של הנגזרות הדרושות לאופטימיזציה בעלות חישובית נמוכה יחסית – ללא תלות במספר המשתנים הלא-ידועים. גישה זו נפוצה במיוחד כאשר המודל מתאר תווך עם שדות חומר מרחביים, ולא רק פרמטרים סקלריים. המסגרת הכללית של המאמר מכוונת ליישומים בתחום זיהוי נזק במבנים באמצעות גלים מכאניים, תוך הנחה שהמדידות נאספות מאזורים נגישים בלבד (ולא בהכרח בסמוך לפגם). המחקר מדגים את הפוטנציאל והאתגרים בזיהוי מדויק של אינקלוזיות בתווך אלסטי, ומהווה שלב חשוב לקראת פיתוח כלים מבוססי FWI לזיהוי נזק וחומר זר במבנים הנדסיים מורכבים.

פורמולציה מתמטית של הבעיה

בעבודה זו מנותח מבנה דו-ממדי בתחום Ω , העשוי מחומר אלסטי-ליניארי. המבנה כולל אינקלוזיה אחת. הגבול החיצוני של המבנה מסומן ב- Γ , וגבול האינקלוזיה ב- γ . האחרון מחלק את התחום לשני אזורים: תחום האינקלוזיה Ω_I ותחום הרקע Ω_O . טנזור האלסטיות C_{ijkl} והצפיפות המסית ρ באזורים אלו מסומנים בכתוב עילי "I" ו-"O", בהתאמה (איור 1). הניסוח המתמטי של הבעיה ההופכית הוא כלהלן: מצא את צורת העקום הסגור γ , את המודולים האלסטיים C_{ijkl}^I ואת הצפיפות המסית ρ^I אשר ממזערים את פונקציונל המחיר

$$(2) \quad \Pi[\gamma, C_{ijkl}^I, \rho^I] = \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Omega_M} |u - u_M|^2 d\Omega dt$$

כך ש- u מהווה פתרון לבעייה האלסטית (משוואות, תנאי התחלה ותנאי שפה). מעתה והלאה מונח כי החומר הנו איזוטרופי, ועל כן המודולים האלסטיים מתנוונים מ-21 התכונות C_{ijkl} לשתי תכונות: מודול יאנג E (נעלם) ומקדם פואסון ν (מונח כידוע).

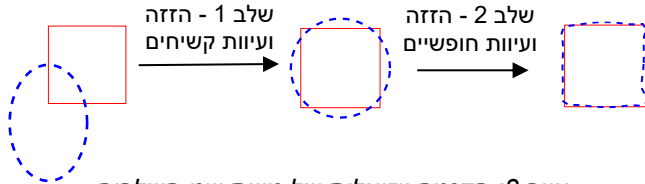
דיסקרטיזציה של צורת האינקלוזיה γ

צורת האינקלוזיה γ מתוארת באמצעות ייצוג פרמטרי מהצורה $r(s) = [x(s), y(s)]^T$, כאשר $0 \leq s \leq 1$. יצוג זה הוא כללי לחלוטין ואינו מניח מראש כל מבנה גאומטרי כלשהו של העקום. לצורך פתרון נומרי, מבוצעת דיסקרטיזציה של הפונקציות $x(s), y(s)$ באמצעות שיטת האלמנטים הסופיים, כך שהן מנוונות לאוסף של N נקודות בדידות (x_A, y_A) , $1 \leq A \leq N$ (איור 2).

3. הצבת הפתרונות u, u^* בנוסחאות מתאימות אשר מספקות את כלל הנגזרות $\partial \Pi / \partial k$ (ראה [1]).
 חלק מהפיתוח של שיטת הצמוד נדרש לבצע גזירה אנליטית של הפונקציונל (2) לפי נעלמי הבעיה. גזירה זו מורכבת עקב העובדה שהתלות בצורת האינקלזיה מופיעה הן דרך פונקציית האינטגרנד (דרך u), והן דרך תחום האינטגרציה Ω_M . לכן, יש לבצע גזירה תחת סימן האינטגרל, תוך התחשבות בתנועת הגבול γ . להרחבה בנושא זה, ראו [2].

גישת שני-השלבים

פתרון בעיות זיהוי צורה מורכבות מחייב גישה הדרגתית ומובנית. אנחנו מחלקים את תהליך הזיהוי לשני שלבי משנה: בשלב הראשון אנו מאפשרים רק עיוות מוגבל של γ , כזה שמאפשר הזזה קשיחה ומתיחה/כיווץ אחידים, בעוד בשלב השני אנו מאפשרים עיוות צורה חופשי לחלוטין. מטרת השלב הראשון היא לספק זיהוי ב"קנה מידה גבוה", ואילו השלב השני מזהה את דפוס האיזומטריה "בקנה מידה נמוך". הסיבה לגישה זו היא שאופטימיזציה עם עיוות חופשי מלכתחילה, כשמיקום וגודל הניחוש ההתחלתי שונים באופן מהותי מאלו של צורת היעד, נוטה להתכנס למינימום מקומי ולא רצוי. לעומת זאת, כאשר העיוות מוגבל לדפוס מסוים, הסיכוי להתכנס לנקודת מינימום פוחתת משמעותית, משום שתהליך לא מאפשר להתכנס לכל צורה. לכן, תחילה אנו מבצעים אופטימיזציה בעלת עיוות מוגבל, ללא שינוי תכונות החומר, שמביאה את הניחוש הראשוני עבור γ לאזור הנכון ("השלב הראשון"), ולאחר מכן מבצעים אופטימיזציה של עיוות צורה חופשי ושינוי תכונות חומר, שסביר מאוד שתתכנס לפתרון הנכון ("השלב השני") – ראו איור 3.



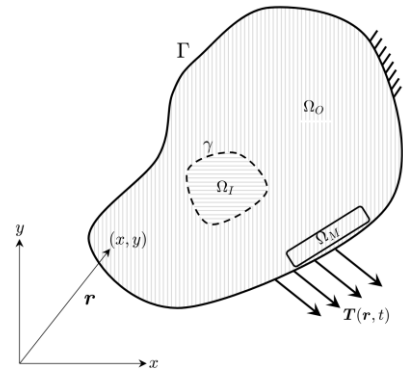
איור 3: הדגמה ויזואלית של גישת שני השלבים

תוצאות נומריות

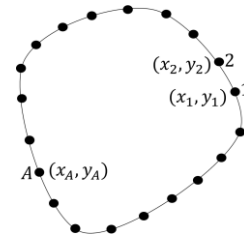
לצורך ניתוח שיטתי ומבוקר, אשר יאפשר קבלת מסקנות מבוססות, נבחנו מצבים בהם חלק מנעלמי הבעיה γ, E^I, ρ^I ידועים מראש, כך שתהליך הזיהוי בוצע עבור הנותרים. במסגרת גישה זו, נבחנו שלושה מקרים אופייניים, כל אחד מהם נפתר בשיטת BFGS¹:

1. זיהוי תכונת החומר E^I (γ, ρ^I ידועים)

תחילה נבחנו מאפייני פונקציונל המחיר $\Pi(E^I)$, כאשר γ, ρ^I ידועים. נבחנו שני מקרים שבהם צורת γ היתה אליפטית. הפרטים המלאים אודות גיאומטריית הבעיה והעמיסה מופיעים ב-[1]. הזיהוי בוצע פעם אחת עבור אינקלזיה רכה² בעלת יחסים $E_{true}^I/E^0 = 10^{-3}$, $\rho_{true}^I/\rho^0 = 0.95$ ופעם אחרת עבור אינקלזיה קשיחה³ בעלת יחסים $E_{true}^I/E^0 = 0.5$, $\rho_{true}^I/\rho^0 = 0.1$. ניתן לראות באיור 4-א כי לאינקלזיה הרכה מתאימה פונקציה לא חלקה, בעלת נקודת מינימום מקומית. באיור 5-ב מתואר תהליך הזיהוי



איור 1: תיאור סכמטי של הגיאומטריה הבעייתית, הכולל את מערכת הצירים, תחום הגוף האלסטי, האינקלזיה הכלואה בתוכו, וכן העומסים החיצוניים המופעלים על שפת התחום.



איור 2: תיאור ויזואלי של חלוקת העקום לנקודות בדידות.

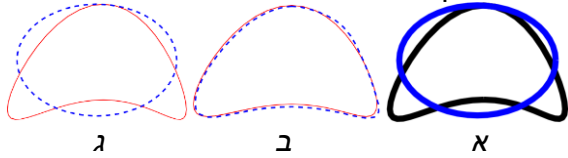
שיטת הצמוד

תהליכי אופטימיזציה איטרטיביים מבוססי-גראדיינט מחייבים את חישוב נגזרות פונקציונל המחיר Π ביחס לכל אחד מנעלמי הבעיה: תכונות החומר E^I, ρ^I וכן $2N$ הפרמטרים המתארים את גיאומטריית האינקלזיה x_A, y_A , עבור $1 \leq A \leq N$. חישוב ישיר של נגזרות אלו, לדוגמה באמצעות שיטת הפרשים סופיים, דורש פתרון של $2N + 1$ בעיות אלסטיות – דבר שהופך לבלתי ישים כאשר דיסקרטיזציה העקום עדינה (N בעל ערך גבוה). כדי להתגבר על קושי חישובי זה, מקובל לפתח שיטת צמוד (adjoint method) מתאימה. במסגרת שיטה זו ניתן לחשב את הגרדיאנט, מקובל לפתח שיטת צמוד מתאימה. שיטה זו מצמצמת את כמות הבעיות הנדרשות לחישוב הגרדיינט ל-2, ללא תלות ב- N : בעיה קדמית ובעיית צמוד. האחרונה היא בעיית עזר, חסרת משמעות פיסיקלית, המתקבלת מפיתוח מתמטי של הפיתוח המלא מופיע ב-[1]. אך לא יובא כאן מפתח אורכו ומורכבותו. תוצאת הפיתוח מראה כי אם כלל הנעלמים $(E^I, \rho^I, x_1, \dots, x_N, y_1, \dots, y_N)$ מקובצים לכדי וקטור k , אזי הגרדיינט $\partial \Pi / \partial k$ מחושב ביעילות לפי השלבים הבאים:

- פתרון הבעיה הקדמית במצב (k, u) למציאת u .
- פתרון בעיית הצמוד במצב k , למציאת u^* . הניסוח המתמטי של בעיה זו דומה לזו של הבעיה הקדמית למעט שלושה הבדלים: ראשית, העומסים הפועלים בשיטת הצמוד הם עומסים "מתמטיים", חסרי משמעות פיסיקלית, המוגדרים לפי ההפרש $u - u_M$, ללא קשר לעומסים הפועלים בבעיה הקדמית. שנית, בעיית הצמוד כוללת תנאי סוף ולא תנאי התחלה. שלישית, כל התנאים – תנאי השפה ותנאי הסוף הם הומוגניים, ללא קשר לתנאים המופיעים בבעיה הקדמית.

¹ BFGS היא שיטת אופטימיזציה איטרטיבית מסוג quasi-Newton המבוססת על קירוב מטריצת ההסיאן ומאפשרת התכנסות מהירה יחסית ללא צורך בחישוב ישיר של נגזרות שניות.

עבור אינקלוזיות קשיחות. מכאן, ניתן לצפות כי זיהוי משולב של צורה ותכונות חומר יהיה מאתגר. מניתוח מעמיק יותר אשר מפורט ב-[1] עולה כי באינקלוזיות רכות, זיהוי סימולטני של γ ו- E^I מספק זיהוי מדויק של הצורה אך זיהוי פחות מדויק של תכונות החומר, בעוד שבאינקלוזיות קשיחות מתקבל המצב ההפוך – זיהוי מדויק של תכונות החומר אך זיהוי פחות מוצלח של הצורה. דוגמאות מפורטות לכך מוצגות ב-[1], ואינן מובאות כאן במפורש.



איור 6 – זיהוי צורת אינקלוזיה בעלת צורה קעורה כאשר תכונות החומר ידועות. באיור א' מופיעה צורת האינקלוזיה בשחור וצורת הניחוש ההתחלתי בכחול. איורים ב' ו-ג' מציגים את הזיהוי עבור אינקלוזיה רכה וקשה, בהתאמה. באיורים אלו קווים כחולים מקווקים מתארים את הצורה שזוהתה בעוד שקווים אדומים שמתארים את צורת היעד.

סיכום ומסקנות

במסגרת עבודה זו יושם אלגוריתם דו-שלבי לזיהוי אינקלוזיה בתווך אלסטי. השלב הראשון התמקד בזיהוי המיקום והגודל של האינקלוזיה, בעוד שהשלב השני התמקד בזיהוי הצורה המדויקת ותכונות החומר. כל אחד מהשלבים נפתר באמצעות אלגוריתם BFGS, כאשר הנגזרות הדרושות חושבו בעילות באמצעות שיטת הצמוד. האלגוריתם נבחן עבור מגוון אינקלוזיות בעלות יחסי קשיחות וצפיפות שונים. נמצא כי עבור אינקלוזיות קשיחות מתקבל זיהוי תכונות חומר מוצלח, אך זיהוי הצורה נפגע. תוצאה זו ניתנת להבנה באמצעות מקרה הקיצון שבו תכונות החומר של האינקלוזיה זהות לתכונות הרקע: במצב כזה צורת האינקלוזיה חסרת משמעות פיסיקלית, ופונקציית המחיר אינה רגישה אליו. לעומת זאת, באינקלוזיות רכות – שבהן הניגודיות ביחס לרקע גבוהה – קל יותר לזהות את הגבול המפריד, אך זיהוי תכונות החומר עלול להיכשל. בניגוד למקרה של חור בממברנה, בעיית האינקלוזיה מתאפיינת בפונקציונל עלות שאיננו חלק ומכיל נקודות מינימום מקומיות רבות, מה שמחריף את חולי הבעיה (*ill-posedness*) ומקשה על תהליך האופטימיזציה.

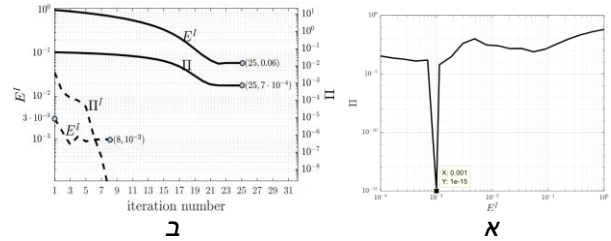
תודות

תודה מיוחדת לפרופ' דן גבעולי על הנחייתו לאורך המחקר שפורסם ב-[1] ו-[2] ותומצת לכדי מאמר זה, וכן על הגהות והערותיו על מאמר זה.

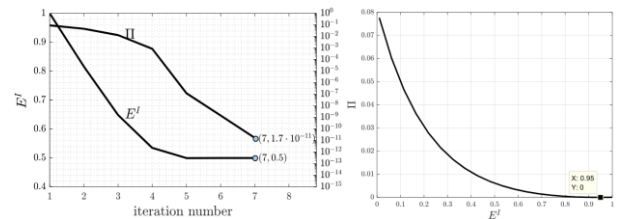
מקורות

- [1] Sayag, A., & Givoli, D. (2025). Shape and property identification of an elastic inclusion via a full waveform inversion and adjoint method. *Journal of Theoretical and Computational Acoustics*, 2550004.
- [2] Sayag, A., & Givoli, D. (2022). Shape identification of scatterers using a time-dependent adjoint method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 394, 114923.

פעמיים: פעם אחת עם ניחוש התחלתי "רחוק", $E^{I(0)}/E^0 = 1$, המוביל להתכנסות למינימום מקומי, ופעם אחרת עם ניחוש התחלתי "קרוב", $E^{I(0)}/E^0 = 3 \cdot 10^{-3}$, אשר מוביל להתכנסות לנקודת המינימום הגלובלית הרצויה. באיור 5, המתייחס לאינקלוזיה הקשיחה, התקבלה פונקציית עלות חלקה, בעלת מינימום יחיד, וזיהוי מדויק התקבל מכל ניחוש התחלתי. נבחנו ב-[1] מקרים נוספים; כולם העידו שלצורך זיהוי תכונות חומר, ככל שהאינקלוזיה קשיחה יותר כך צורת פונקציית המחיר חלקה יותר, בעלת פחות מינימום מקומי, ומתאימה יותר לשיטות אופטימיזציה מבוססות גרדיאנט.



איור 4: ניתוח אינקלוזיה רכה שבה $E^{I_{true}}/E^0 = 10^{-3}$, $\rho_{true}^I/\rho^0 = 0.95$. בתת-איור א' מתוארת צורת $\Pi(E^I)$ ובתת-איור ב' מתוארים הערכים האיטרטיביים של Π, E^I בתהליך הזיהוי עבור שני ניחושים התחלתיים: אחד מיוצג בקו רציף והשני בקו מקווקו.



איור 5: ניתוח אינקלוזיה קשיחה שבה $E^{I_{true}}/E^0 = 0.5$, $\rho_{true}^I/\rho^0 = 0.1$. בתת-איור א' מתוארת צורת $\Pi(E^I)$ ובתת-איור ב' מתוארים הערכים האיטרטיביים של Π, E^I בתהליך הזיהוי.

2. זיהוי צורת האינקלוזיה $\gamma(E^I, \rho^I)$ (ידועים)

במקרה זה בוצע זיהוי של צורת אינקלוזיה קעורה, תוך שימוש בניחוש התחלתי אליפטי. הפרטים המלאים אודות גיאומטריית הבעיה והעמיסה מופיעים ב-[1]. באיור 6-א מוצגת צורת האינקלוזיה בקו שחור לצד צורת הניחוש ההתחלתי בכחול. תהליך הזיהוי יושם בהתאם לגישת שני השלבים, ובוצע בשני תרחישים: אינקלוזיה רכה, המאופיינת ביחסים $E^{I_{true}}/E^0 = 10^{-3}$, $\rho_{true}^I/\rho^0 = 0.95$, ואינקלוזיה קשיחה עם יחסים $E^{I_{true}}/E^0 = 0.5$, $\rho_{true}^I/\rho^0 = 0.1$. תוצאות הזיהויים מופיעות, בהתאמה, באיורים 6-ב ו-6-ג. קווים כחולים מקווקים מתארים את הצורה שזוהתה בעוד שקווים אדומים שמתארים את צורת היעד. מאיורים אלו עולה כי זיהוי צורה באינקלוזיה הרכה היה מצוין, בעוד שבאינקלוזיה הקשיחה הזיהוי נכשל. מדוגמה זו ומדוגמאות נוספות המפורטות ב-[1], עולה כי אינקלוזיות רכות מאפשרות זיהוי צורה טוב יותר. מעניין לציין כי מסקנה זו מנוגדת לזו שהתקבלה במקרה של זיהוי תכונות החומר.

3. זיהוי מקבילי של הצורה ושל תכונת החומר E^I

ממצאים קודמים הראו כי זיהוי הצורה יעיל יותר עבור אינקלוזיות רכות, בעוד שזיהוי תכונות החומר יעיל יותר